Математическая Теория Игр и её Приложения, т.12, в.4, с. 93–111

УДК 517.977.8
ББК 22.17

КООПЕРАТИВНЫЕ ПРИНЦИПЫ ОПТИМАЛЬНОСТИ В ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ИГРАХ НА СЕТЯХ

Анна В. Тур
Леон А. Петросян*
Санкт-Петербургский Государственный университет
198504, Санкт-Петербург, Университетский пр., 35
e-mail: a.tur@spbu.ru, l.petrosyan@spbu.ru

В работе описывается класс дифференциальных игр на сетях. Исследован вопрос построения кооперативных принципов оптимальности с использованием характеристической функции специального вида, учитывающей сетевую структуру игры. В качестве кооперативных принципов оптимальности используется С-ядро, вектор Шепли и τ-вектор. Результаты демонстрируются на модели дифференциальной игры инвестирования исследований, где в явном виде строятся вектор Шепли и τ-вектор.

Ключевые слова: дифференциальные игры, игры на сетях, кооперативные игры.

Поступила в редакцию: 30.10.20 *После доработки*: 24.11.20 *Принята к публикации*: 05.12.20

1. Введение

При моделировании реальных конфликтно-управляемых процессов со многими участниками необходимо учитывать возможность

---

*Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект 17-11-01079).

участников взаимодействовать и влиять друг на друга. В связи с этим популярным направлением исследований сейчас является теория игр на сетях. В таких играх предполагается, что индивидуумы соединены с помощью сети, игроки в которой отождествляются с узлами, а ребра определяют наличие и характер связей между ними. Благосостояние и поведение игроков при этом зависит от поведения игроков, с которыми заданная сетевая структура допускает взаимодействие. Обзор и структурирование современных тенденций в сетевых играх можно найти в работах [1], [2], [5], [9], [10].

В случае, если процесс принятия решения происходит непрерывно во времени актуальным оказывается использование моделей дифференциальных игр на сетях. Исследованию кооперативных дифференциальных игр на сетях посвящены работы [3], [11], [12]. Кооперативные принципы оптимальности обычно предполагают использование характеристической функции для справедливого распределения суммарного максимального выигрыша между игроками. В работе [12] предложен новый способ построения характеристической функции, учитывающий сетевую структуры игры. Целью данной статьи является построение кооперативных принципов оптимальности в дифференциальных играх на сетях с использованием новой характеристической функции.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 описана исходная модель кооперативной дифференциальной игры на сети. В разделе 3 исследуются кооперативные принципы оптимальности для рассматриваемого класса игр. Раздел 4 посвящен иллюстративному примеру кооперативной игры инвестирования исследований на сети. В разделе 5 приведены выводы.

2. Кооперативная дифференциальная игра на сети

Рассмотрим дифференциальную игру n лиц, описанную в работе [11]. Пусть $N = \{1; 2; \dots; n\}$ – множество игроков, объединенных в сеть. Пару (N, L), где N – множество узлов, а $L \in N \times N$ – множество ребер, будем называть сетью. Игроки отождествляются с узлами. Если $(i, j) \in L$, то существует ребро, соединяющее игроков $i \in N$ и $j \in N$. Предполагается, что все ребра ненаправленные.

Обозначим через $\widetilde{K}(i)$ множество всех игроков (узлов), с которыми в данной сети имеется связь у игрока i: $\widetilde{K}(i) = \{j : \ (i; j) \in L\}$.

Введем также множество $K(i) = \widetilde{K}(i) \cup i$, для $i \in N$. Пусть $x^i(t) \subset R^m$ – переменная состояния игрока $i \in N$ в момент времени t, и $u^i(t) \in U_i \subset R^k$ – управляющая переменная игрока $i \in N$.

Предположим, что каждый игрок $i \in N$ может обрубить связь с любым другим игроком из множества $\widetilde{K}(i)$ в любой момент времени.

Уравнения движения игроков имеют вид:

$$\dot{x}^i(\tau) = f^i(x^i(\tau); u^i(\tau)); \quad x^i(t_0) = x_0^i; \text{ при } \tau \in [t_0; T], i \in N, \tag{2.1}$$

где функции $f^i(x^i; u^i)$ непрерывно дифференцируемы по x^i и u^i.

Функция выигрыша игрока i зависит от переменной его состояния и переменных состояния игроков из множества $\widetilde{K}(i)$ и имеет вид:

$$H_i(x_0^i; x_0^{K(i)}; u^i) = \sum_{j \in K(i)} \int_{t_0}^{T} h_i^j(x^i(\tau); x^j(\tau); u^i(\tau)) d\tau + q_i(x^i(T)). \tag{2.2}$$

Здесь $h_i^j(x^i(\tau); x^j(\tau); u^i(\tau))$ – это мгновенный выигрыш игрока i, который он может получить при взаимодействии с игроком $j \in \widetilde{K}(i)$, $h_i^i(x^i(\tau); x^i(\tau); u^i(\tau))$ – мгновенный выигрыш игрока i, который он получает самостоятельно, $q_i(x^i(T))$ – терминальный выигрыш игрока i. Пусть $h_i^j(x^i(\tau); x^j(\tau); u^i(\tau)) \geq 0$, где $j \in \widetilde{K}(i)$. Через $x(t)$ обозначим вектор $(x^1(t); x^2(t); \ldots; x^n(t))$.

Предположим, что игроки могут кооперироваться с целью достижения максимального суммарного выигрыша:

$$\sum_{i \in N} \left(\sum_{j \in K(i)} \int_{t_0}^{T} h_i^j(x^i(\tau), x^j(\tau), u^i(\tau)) d\tau + q_i(x^i(T)) \right), \tag{2.3}$$

где $x(t)$ – решение системы (2.1).

Оптимальные кооперативные стратеги игроков $\overline{u}(t) = (\overline{u}^1(t), \ldots, \overline{u}^n(t)$, для $t \in [t_0; T]$ определим по правилу

$$\overline{u}(t) =$$
$$= arg \max_{u^1(t), \ldots, u^n(t)} \sum_{i \in N} \left(\sum_{j \in K(i)} \int_{t_0}^{T} h_i^j(x^i(\tau), x^j(\tau), u^i(\tau)) d\tau + q_i(x^i(T)) \right). \tag{2.4}$$

Траектория $\overline{x}(t) = (\overline{x}^1(t); \overline{x}^2(t), \ldots, \overline{x}^n(t))$, соответствующая оптимальным стратегиям $\overline{u}^1(t), \ldots, \overline{u}^n(t)$, – оптимальная кооперативная траектория. Тогда максимальный совместный выигрыш игроков имеет вид:

$$\sum_{i \in N} \left(\sum_{j \in K(i)} \int\limits_{t_0}^{T} h_i^j(\overline{x}^i(\tau); \overline{x}^j(\tau); \overline{u}^i(\tau)) d\tau + q_i(\overline{x}^i(T)) \right) =$$
$$\max_{u^1, \ldots, u^n} \left\{ \sum_{i \in N} \left(\sum_{j \in K(i)} \int\limits_{t_0}^{T} h_i^j(x^i(\tau); x^j(\tau); u^i(\tau)) d\tau + q_i(x^i(T)) \right) \right\}. \quad (2.5)$$

3. Кооперативные принципы оптимальности

Для определения справедливого способа распределения суммарного выигрыша между игроками необходимо построить характеристическую функцию.

Долгое время для нахождения кооперативных решений использовался только метод Неймана-Моргенштейна построения характеристической функции [16], в котором сила коалиции оценивалась как максимальный гарантированный выигрыш этой коалиции. В последнее время стали появляться разные новые подходы к построению характеристической функции. Такие функции легче вычислить или же они обладают некоторыми полезными свойствами. Систематический обзор различных современных подходов в этой области можно найти в [7], [8].

Для кооперативных дифференциальных игр на сетях в работе [3] показано, что в рассматриваемом классе игр классическая характеристическая функция принимает вид:

$$V(S; x_0, T - t_0) =$$
$$= \max_{u_i, i \in S} \sum_{i \in S} \left(\sum_{j \in K(i) \cap S} \int\limits_{t_0}^{T} h_i^j(x^i(\tau); x^j(\tau); u^i(\tau)) d\tau + q_i(x^i(T)) \right). \quad (3.1)$$

Поскольку игроки имеют возможность разорвать связи (ребра) с другими игроками в любой момент времени и мгновенные выигрыши h_i^j неотрицательны, в формуле (3.1) нет операции минимизации по оставшимся игрокам (игрокам из $N \setminus S$), поскольку минимизация и заключается в том, чтобы разорвать связь с игроками из S.

В работе [12] был предложен новый способ построения характеристической функции для дифференциальных игр на сетях, в котором сила коалиций на кооперативной траектории оценивалась как

$$\overline{V}(S; x_0, T-t_0) = \sum_{i\in S}\left(\sum_{j\in K(i)\cap S}\int\limits_{t_0}^{T} h_i^j(\overline{x}^i(\tau); \overline{x}^j(\tau); \overline{u}^i(\tau))d\tau + q_i(\overline{x}^i(T))\right). \tag{3.2}$$

Как видим, формула (3.2) также не учитывает действия игроков из коалиции $N \setminus S$, а игроки из S используют оптимальные кооперативные стратегии.

В [12] было показано, что такая функция обладает свойствами супермодулярности и супераддитивности в рассматриваемом классе игр, что гарантирует непустоту С-ядра и принадлежность вектора Шепли С-ядру.

Заметим, что $\overline{V}(S; x_0, T - t_0)$ можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned}\overline{V}(S; x_0, T - t_0) = \sum_{i\in S}\overline{V}(\{i\}; x_0, T - t_0)+\\ + \sum_{i\in S}\sum_{j\in \widetilde{K}(i)\bigcap S}\int\limits_{t_0}^{T} h_i^j(\overline{x}^i(\tau); \overline{x}^j(\tau); \overline{u}^i(\tau))d\tau,\end{aligned} \tag{3.3}$$

где

$$\overline{V}(\{i\}; x_0, T - t_0) = \int\limits_{t_0}^{T} h_i^i(\overline{x}^i(\tau); \overline{x}^i(\tau); \overline{u}^i(\tau))d\tau + q_i(\overline{x}^i(T)).$$

Следующая проблема при построении кооперативного решения – это определение правила распределения максимального совместного выигрыша между игроками. В этой статье мы рассмотрим несколько способов распределения, основанных на разных принципах оптимальности, в построении которых используется характеристическая функция $\overline{V}(S; x_0, T - t_0)$.

Обозначим через $\overline{L}(x_0, T - t_0)$ множество всех дележей игры:

$$\overline{L}(x_0,T-t_0)=\{\xi(x_0,T-t_0)=(\xi_1(x_0,T-t_0),\dots,\xi_n(x_0,T-t_0)):\\ \sum_{i\in N}\xi_i(x_0,T-t_0)=\overline{V}(N;x_0,T-t_0),\\ \xi_i(x_0,T-t_0)\geq\overline{V}(\{i\};x_0,T-t_0),\ i\in N.\}\quad(3.4)$$

Определение 3.1 ([6]). *C-ядром кооперативной дифференциальной игры называется подмножество дележей вида*

$$\overline{C}(x_0,T-t_0)=\{\xi(x_0,T-t_0)\in\overline{L}(x_0,T-t_0):\\ \sum_{i\in S}\xi_i(x_0,T-t_0)\geq\overline{V}(S;x_0,T-t_0),\ S\subset N.\}\quad(3.5)$$

Теорема 3.1. *Если характеристическая функция в кооперативной дифференциальной игре на сети (2.1)–(2.2) определена по правилу (3.2), то для любого* $\lambda\in[0,1]$ *дележи следующего вида*

$$\xi_i(x_0,T-t_0)=\overline{V}(\{i\};x_0,T-t_0)+\lambda\sum_{j\in\widetilde{K}(i)}\int\limits_{t_0}^{T}h_i^j(\overline{x}^i(\tau);\overline{x}^j(\tau);\overline{u}^i(\tau))d\tau+\\ +(1-\lambda)\sum_{j\in\widetilde{K}(i)}\int\limits_{t_0}^{T}h_j^i(\overline{x}^i(\tau);\overline{x}^j(\tau);\overline{u}^i(\tau))d\tau\quad(3.6)$$

принадлежат C-ядру $\overline{C}(x_0,T-t_0)$.

Доказательство. Для удобства введём следующее обозначение

$$\overline{g}_i^j(x_0,T-t_0)=\int\limits_{t_0}^{T}h_i^j(\overline{x}^i(\tau);\overline{x}^j(\tau);\overline{u}^i(\tau))d\tau.$$

Тогда

$$\sum_{i\in S}\xi_i(x_0,T-t_0)=\sum_{i\in S}\Bigg(\overline{V}(\{i\};x_0,T-t_0)+\\ +\sum_{j\in\widetilde{K}(i)}\left(\lambda\overline{g}_i^j(x_0,T-t_0)+(1-\lambda)\overline{g}_j^i(x_0,T-t_0)\right)\Bigg)=$$

$$= \sum_{i\in S}\left(\overline{V}(\{i\};x_0,T-t_0)+\sum_{j\in\widetilde{K}(i)\bigcap S}\overline{g}_i^j(x_0,T-t_0)\right)+$$
$$+\sum_{i\in S}\sum_{j\in\widetilde{K}(i)\setminus S}\left(\lambda\overline{g}_i^j(x_0,T-t_0)+(1-\lambda)\overline{g}_j^i(x_0,T-t_0)\right)=$$
$$=\overline{V}(S;x_0,T-t_0)+$$
$$+\sum_{i\in S}\sum_{j\in\widetilde{K}(i)\setminus S}\left(\lambda\overline{g}_i^j(x_0,T-t_0)+(1-\lambda)\overline{g}_j^i(x_0,T-t_0)\right). \quad (3.7)$$

Учитывая неотрицательность функций h_j^i, получаем, что достаточное условие для принадлежности дележу С-ядру выполняется:

$$\sum_{i\in S}\xi_i(x_0,T-t_0)\geq\overline{V}(S;x_0,T-t_0).$$

Покажем теперь, что построенный вектор действительно является дележом.

Условие индивидуальной рациональности $\xi_i(x_0,T-t_0)\geq\overline{V}(\{i\};x_0,T-t_0)$ выполняется по построению.

Для проверки условия групповой рациональности подставим в (3.7) максимальную коалицию N:

$$\sum_{i\in N}\xi_i(x_0,T-t_0)=\overline{V}(N;x_0,T-t_0)+$$
$$+\sum_{i\in N}\sum_{j\in\widetilde{K}(i)\setminus N}\left(\lambda\overline{g}_i^j(x_0,T-t_0)+(1-\lambda)\overline{g}_j^i(x_0,T-t_0)\right). \quad (3.8)$$

Заметим, что для любых i и j: $j\in\widetilde{K}(i)\setminus N=\emptyset$. Значит, действительно, $\sum_{i\in N}\xi_i(x_0,T-t_0)=\overline{V}(N;x_0,T-t_0)$. □

Следующая теорема говорит о том, что получить в качестве дележа вектор Шепли [13] можно, выбрав в качестве λ число $\frac{1}{2}$.

Теорема 3.2. *Если характеристическая функция в кооперативной дифференциальной игре на сети (2.1)–(2.2) определена по правилу (3.2), то вектор Шепли в этой игре имеет вид*

$$\overline{Sh}_i(x_0, T-t_0) = \overline{V}(\{i\}; x_0, T-t_0) +$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{j\in\widetilde{K}(i)}\int\limits_{t_0}^{T}\Big(h_i^j(\overline{x}^i(\tau);\overline{x}^j(\tau);\overline{u}^i(\tau)) + h_j^i(\overline{x}^i(\tau);\overline{x}^j(\tau);\overline{u}^i(\tau))\Big)\,d\tau. \quad (3.9)$$

Доказательство.

$$\overline{Sh}_i(x_0, T-t_0) = \sum_{S:\ i\in S}\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}(\overline{V}(S) - \overline{V}(S\setminus i)) =$$
$$= \sum_{S:\ i\in S}\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}\left(\sum_{k\in S}\left(\sum_{j\in K(k)\cap S}\overline{g}_k^j(x_0, T-t_0) +\right.\right.$$
$$\left.\left. + q_k(\overline{x}^k(T))\right) - \sum_{k\in S\setminus i}\left(\sum_{j\in K(k)\cap S\setminus i}\overline{g}_k^j(x_0, T-t_0) + q_k(\overline{x}^k(T))\right)\right) =$$
$$= \sum_{S:\ i\in S}\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}\left(\int\limits_{t_0}^{T}h_i^i(\overline{x}^i(\tau);\overline{x}^i(\tau);\overline{u}^i(\tau))d\tau + q_i(\overline{x}^i(T))\right) +$$
$$+ \sum_{S:\ i\in S}\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}\sum_{j\in\widetilde{K}(i)\cap S}(\overline{g}_i^j(x_0, T-t_0) + \overline{g}_j^i(x_0, T-t_0)) =$$
$$= \overline{V}(i, x_0, T-t_0) +$$
$$\sum_{S:\ i\in S}\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}\sum_{j\in\widetilde{K}(i)\cap S}(\overline{g}_i^j(x_0, T-t_0) + \overline{g}_j^i(x_0, T-t_0)). \quad (3.10)$$

Заметим, что два игрока i и j вместе входят в C_{n-2}^{s-2} коалиций мощности s. Тогда

$$\overline{Sh}_i(x_0, T-t_0) = \overline{V}(i, x_0, T-t_0) +$$
$$+ \sum_{j\in\widetilde{K}(i)}\sum_{s=2}^{n}\frac{(s-1)!(n-s)!}{n!}C_{n-2}^{s-2}\big(\overline{g}_i^j(x_0, T-t_0) + \overline{g}_j^i(x_0, T-t_0)\big) =$$
$$= \overline{V}(i, x_0, T-t_0) + \sum_{j\in\widetilde{K}(i)}\sum_{s=2}^{n}\frac{s-1}{n(n-1)}\big(\overline{g}_i^j(x_0, T-t_0) + \overline{g}_j^i(x_0, T-t_0)\big) =$$
$$= \overline{V}(i, x_0, T-t_0) + \frac{1}{2}\sum_{j\in\widetilde{K}(i)}\big(\overline{g}_i^j(x_0, T-t_0) + \overline{g}_j^i(x_0, T-t_0)\big). \quad (3.11)$$

Теорема доказана. □

В качестве еще одного кооперативного принципа оптимальности рассмотрим τ-вектор, предложенный в работах [14, 15], определяемый по правилу:

$$\tau_i(x_0, T-t_0) = \alpha M_i(x_0, T-t_0) + (1-\alpha) m_i(x_0, T-t_0), \qquad (3.12)$$

где

$$M_i(x_0, T-t_0) = \overline{V}(N; x_0, T-t_0) - \overline{V}(N \setminus \{i\}; x_0, T-t_0),$$

$$m_i(x_0, T-t_0) = \max_{S \ni i}(\overline{V}(S; x_0, T-t_0) - \sum_{j \in S \setminus \{i\}} M_j(x_0, T-t_0)),$$

а коэффициент $\alpha \in [0,1]$ определяется из уравнения

$$\sum_{i \in N} (\alpha M_i(x_0, T-t_0) + (1-\alpha) m_i(x_0, T-t_0))) = \overline{V}(N; x_0, T-t_0). \qquad (3.13)$$

Следующая теорема показывает, что в рассматриваемом классе игр τ-вектор совпадает с вектором Шепли.

Теорема 3.3. *Если характеристическая функция в кооперативной дифференциальной игре на сети (2.1)–(2.2) определена по правилу (3.2), то τ-вектор в этой игре совпадает с вектором Шепли.*

Доказательство. Учитывая (3.3), получаем, что $M_i(x_0, T-t_0)$ имеет вид:

$$M_i(x_0, T-t_0) = \overline{V}(\{i\}; x_0, T-t_0) +$$

$$+ \sum_{j \in \widetilde{K}(i)} \int_{t_0}^{T} (h_i^j(\overline{x}^i(\tau); \overline{x}^j(\tau); \overline{u}^i(\tau)) + h_j^i(\overline{x}^j(\tau); \overline{x}^i(\tau); \overline{u}^j(\tau)))d\tau. \qquad (3.14)$$

Тогда

$$\overline{V}(S; x_0, T-t_0) - \sum_{j \in S \setminus \{i\}} M_j(x_0, T-t_0) = \overline{V}(\{i\}; x_0, T-t_0) -$$

$$- \sum_{j \in \widetilde{K}(i) \bigcap S} \int_{t_0}^{T} (h_j^i(\overline{x}^j(\tau); \overline{x}^i(\tau); \overline{u}^j(\tau)))d\tau -$$

$$-\sum_{j\in S\setminus K(i)}\sum_{k\in\widetilde{K}(j)}\int_{t_0}^{T}(h_j^k(\overline{x}^j(\tau);\overline{x}^k(\tau);\overline{u}^j(\tau))+h_k^j(\overline{x}^k(\tau);\overline{x}^j(\tau);\overline{u}^k(\tau)))d\tau. \tag{3.15}$$

Учитывая неотрицательность функций h_i^j, получаем, что

$$\overline{V}(S;x_0,T-t_0)-\sum_{j\in S\setminus\{i\}}M_j(x_0,T-t_0)\le\overline{V}(\{i\};x_0,T-t_0).$$

При этом равенство достигается в случае, если $S=\{i\}$. Таким образом, мы показали, что

$$m_i(x_0,T-t_0)=\overline{V}(\{i\};x_0,T-t_0).$$

Найдем значения α из уравнения (3.13):

$$\sum_{i\in N}\big(\alpha M_i(x_0,T-t_0)+(1-\alpha)\overline{V}(\{i\};x_0,T-t_0)\big)=\overline{V}(N;x_0,T-t_0).$$

Получаем

$$\alpha=\frac{\overline{V}(N;x_0,T-t_0)-\sum\limits_{i\in N}\overline{V}(\{i\};x_0,T-t_0)}{\sum\limits_{i\in N}\sum\limits_{j\in\widetilde{K}(i)}\int_{t_0}^{T}(h_j^i(\overline{x}^j(\tau);\overline{x}^i(\tau);\overline{u}^j(\tau))+h_i^j(\overline{x}^i(\tau);\overline{x}^j(\tau);\overline{u}^i(\tau)))d\tau}=$$

$$=\frac{\sum\limits_{i\in N}\sum\limits_{j\in\widetilde{K}(i)}\int_{t_0}^{T}h_i^j(\overline{x}^i(\tau);\overline{x}^j(\tau);\overline{u}^i(\tau))d\tau}{2\sum\limits_{i\in N}\sum\limits_{j\in\widetilde{K}(i)}\int_{t_0}^{T}h_i^j(\overline{x}^i(\tau);\overline{x}^j(\tau);\overline{u}^i(\tau))d\tau}=\frac{1}{2}. \tag{3.16}$$

Подставляя $\alpha=\frac{1}{2}$ в (3.12), получаем

$$\tau_i(x_0,T-t_0)=\overline{Sh}_i(x_0,T-t_0)=\overline{V}(\{i\};x_0,T-t_0)+$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{j\in\widetilde{K}(i)}\int_{t_0}^{T}\left(h_i^j(\overline{x}^i(\tau);\overline{x}^j(\tau);\overline{u}^i(\tau))+h_j^i(\overline{x}^i(\tau);\overline{x}^j(\tau);\overline{u}^i(\tau))\right)d\tau. \tag{3.17}$$

$\square$

4. Кооперативная игра инвестирования исследований на сети

В качестве иллюстративного примера рассмотрим модель дифференциальной игры инвестирования исследований на сети. Модель инвестирования в общий запас знаний обсуждалась в работе [4]. Здесь мы предполагаем, что каждый игрок инвестирует только в свою область исследований, но при этом может получать выгоду от смежных областей, т.е. от игроков, с которыми он соединен ребрами сети.

Переменная $x^i(t)$ описывает сколько игрок i накопил знаний и опыта в заданной области к моменту времени t. Динамика $x^i(t)$ задается уравнением

$$\dot{x}^i(t) = u^i(t) - \delta^i x^i(t),\ x^i(t_0) = x^i_0, \tag{4.1}$$

где коэффициент $\delta^i > 0$ обозначает скорость, с которой знания обесцениваются с течением времени, $u_i(t)$ – инвестиции игрока i в исследования. Если каждый агент извлекает квадратичную полезность из потребления запаса знаний и обмена знаниями с соседями, целевые функции задаются следующим образом:

$$H_i(x^i_0, x^{K(i)}_0, u^i) =$$
$$= \int\limits_{t_0}^{T} \left(a_i(x^i(\tau))^2 - c_i(u^i(\tau))^2 + \sum_{j \in \widetilde{K}(i)} b^j_i (x^j(\tau))^2 \right) d\tau + q^i(x^i(T))^2. \tag{4.2}$$

Здесь $a_i(x^i(\tau))^2$ – мгновенный выигрыш игрока i, который он может получить самостоятельно, $c_i(u^i(\tau))^2$ – функция издержек игрока i, $b^j_i(x^j(\tau))^2$ – мгновенный выигрыш игрока i, который он получает от обмена знаниями с игроком $j \in \widetilde{K}(i)$. При этом игроки имеют возможность отказаться от взаимодействия с игроком или игроками из $\widetilde{K}(i)$, тогда соответствующие слагаемые $b^j_i(x^j(\tau))^2$ и $b^i_j(x^i(\tau))^2$ обнуляются.

Предположим, что игроки имеют возможность кооперироваться с целью получения максимального суммарного выигрыша

$$\max_{u^1,\ldots,u^n} \sum_{i\in N} \left(\int_{t_0}^{T} \left(a_i(x^i(\tau))^2 - c_i(u^i(\tau))^2 + \sum_{j\in \widetilde{K}(i)} b_i^j (x^j(\tau))^2 \right) d\tau + \right.$$
$$\left. + q_i(x^i(T))^2 \right). \quad (4.3)$$

Важным вопросом проблемы стимулирования участников исследовательской деятельности является вопрос о разделении получаемых результатов, т.е. о распределении суммарного дохода, полученного от проекта, между участниками с учетом их реального вклада. В таких задачах актуальным оказывается использование характеристической функции, учитывающей сетевую структуру игры. Построим кооперативные принципы оптимальности, основанные на такой характеристической функции (3.3) в рассматриваемой модели.

Воспользуемся принципом динамического программирования для определения оптимальных кооперативных стратегий. Через $\overline{V}(N, x, T-t)$ обозначим функцию Беллмана в подыгре, начинающейся в момент времени t из состояния $x(t)$:

$$\overline{V}(N, x, T-t) =$$
$$\max_{u^1,\ldots,u^n} \sum_{i\in N} \left(\int_{t}^{T} \left(a_i(x^i(\tau))^2 - c_i(u^i(\tau))^2 + \sum_{j\in \widetilde{K}(i)} b_i^j (x^j(\tau))^2 \right) d\tau + \right.$$
$$\left. + q_i(x^i(T))^2 \right). \quad (4.4)$$

Уравнения Гамильтона-Якоби-Беллмана имеют следующий вид:

$$-\overline{V}_t(N, x, T-t) = \max_{u^1,\ldots,u^n} \left[\sum_{i\in N} \left(a_i(x^i(\tau))^2 - c_i(u^i(\tau))^2 + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \sum_{j\in \widetilde{K}(i)} b_i^j (x^j(\tau))^2 \right) + \sum_{i\in N} \overline{V}_{x^i}(N, x, T-t)(u^i(t) - \delta^i x^i(t)) \right],$$
$$V(N, x(T), 0) = \sum_{i\in N} q_i(x^i(T))^2. \quad (4.5)$$

Решение (4.5) будем искать в виде

$$\overline{V}(N,x,T-t)=\sum_{i\in N}A_i(t)(x^i)^2. \tag{4.6}$$

Тогда частные производные $\overline{V}(N,x,T-t)$ вычисляются по формуле

$$\overline{V}_t(N,x,T-t)=\dot{A}_i(t)(x^i)^2,\quad \overline{V}_{x^i}(N,x,T-t)=2A_i(t)x^i. \tag{4.7}$$

Учитывая (4.7), из условия максимизации правой части уравнения (4.5) следует, что оптимальные управления имеют вид

$$\overline{u}^i(t,x^i)=\frac{\overline{V}_{x^i}(N,x,T-t)}{2c_i}=\frac{A_i(t)x^i(t)}{c_i},\ i=\overline{1,n}. \tag{4.8}$$

Подставляя $\overline{u}^i$ в (4.5) и применяя метод неопределённых коэффициентов, получаем уравнения для $A_i(t)$:

$$\dot{A}_i(t)=-\frac{A_i^2}{c_i}+2A_i\delta^i-a_i-\sum_{j\in\widetilde{K}(i)}b_j^i,\quad A_i(T)=q_i. \tag{4.9}$$

Выпишем решение (4.9)

$$A_i(t)=\frac{(q_i-d_{i1})d_{i2}+d_{i1}(d_{i2}-q_i)e^{\frac{d_{i2}-d_{i1}}{c_i}(T-t)}}{q_i-d_{i1}+(d_{i2}-q_i)e^{\frac{d_{i2}-d_{i1}}{c_i}(T-t)}}, \tag{4.10}$$

где $d_{i1}=c_i\delta_i+\sqrt{c_i^2\delta_i^2-c_i(a_i+\sum\limits_{j:\in\widetilde{K}(i)}b_j^i)}$,

$d_{i2}=c_i\delta_i-\sqrt{c_i^2\delta_i^2-c_i(a_i+\sum\limits_{j:\in\widetilde{K}(i)}b_j^i)}$.

Здесь мы предполагаем, что $c_i\delta_i^2-(a_i+\sum\limits_{j\in\tilde{K}(i)}b_j^i)\geq 0$ для всех $i\in N$.

Тогда оптимальные управления имеют вид:

$$\overline{u}^i(t,x^i)=\frac{(q_i-d_{i1})d_{i2}+d_{i1}(d_{i2}-q_i)e^{\frac{d_{i2}-d_{i1}}{c_i}(T-t)}}{c_i(q_i-d_{i1}+(d_{i2}-q_i)e^{\frac{d_{i2}-d_{i1}}{c_i}(T-t)})}x^i,\quad i=\overline{1,n}. \tag{4.11}$$

Оптимальная траектория:

$$\overline{x}^i(t)=x_0^ie^{\frac{d_{i2}-d_{i1}}{2c_i}(t_0-t)}\frac{(q_i-d_{i1})e^{\frac{d_{i2}-d_{i1}}{c_i}(t-T)}+(d_{i2}-q_i)}{(q_i-d_{i1})e^{\frac{d_{i2}-d_{i1}}{c_i}(t_0-T)}+(d_{i2}-q_i)}. \tag{4.12}$$

Получаем следующее значения для максимального суммарного выигрыша:

$$\overline{V}(N, x_0, T-t_0) = \sum_{i\in N} (x_0^i)^2 \frac{(q_i - d_{i1})d_{i2} + d_{i1}(d_{i2} - q_i)e^{\frac{d_{i2}-d_{i1}}{c_i}(T-t_0)}}{q_i - d_{i1} + (d_{i2} - q_i)e^{\frac{d_{i2}-d_{i1}}{c_i}(T-t_0)}}. \tag{4.13}$$

Согласно (3.2), характеристическая функция имеет вид:

$$\overline{V}(S, x_0, T-t_0) = \\ = \sum_{i\in S} \Bigg(\int_{t_0}^{T} \Big(a_i(\bar{x}^i(\tau))^2 - c_i(\bar{u}^i(\tau))^2 + \sum_{j\in\widetilde{K}(i)\cap S} b_i^j(\overline{x}^j(\tau))^2 \Big) d\tau + \\ + q_i(x_0^i)^2 \left(\frac{d_{i2} - d_{i1}}{q_i - d_{i1} + (d_{i2} - q_i)e^{\frac{d_{i2}-d_{i1}}{c_i}(T-t_0)}} \right)^2 \Bigg). \tag{4.14}$$

Как показано в Теореме 3.2, для получения вектора Шепли не обязательно вычислять значение характеристической функции от каждой коалиции. Вектор Шепли найден в явном виде по формуле (3.9):

$$\overline{Sh}_i(x_0, T-t_0) = \sum_{S:\ i\in S} \frac{(s-1)!(n-s)!}{n!} (\overline{V}(S) - \overline{V}(S\setminus i)) = \\ = \overline{V}(\{i\}, x_0, T-t_0) + \frac{1}{2} \sum_{j\in\widetilde{K}(i)} \int_{t_0}^{T} \left[b_i^j(\overline{x}^j(\tau))^2 + b_j^i(\overline{x}^i(\tau))^2 \right] d\tau = \\ = \frac{z_i^2}{r_i}(1 - e^{r_i(t_0-T)})(m_i^2(a_i + \frac{k_i}{2} - \frac{d_{i2}^2}{c_i})e^{r_i(t_0-T)} + p_i^2(a_i + \frac{k_i}{2} - \frac{d_{i1}^2}{c_i})) - \\ - z_i^2 e^{r_i(t_0-T)}(m_i p_i (T-t_0)k_i + q_i r_i^2 c_i^2) + \\ + \frac{1}{2} \sum_{j\in\widetilde{K}(i)} b^{i(j)} z_j^2 (2m_j p_j (T-t_0)e^{r_j(t_0-T)} + \frac{(1 - e^{r_j(t_0-T)})}{r_j}(m_j^2 e^{r_j(t_0-T)} + p_j^2)), \tag{4.15}$$

$m_i = q_i - d_{i1}$, $p_i = d_{i2} - q_i$, $k_i = \sum\limits_{j\in\widetilde{K}(i)} b_j^i$, $r_i = \frac{d_{i2}-d_{i1}}{c_i}$, $z_i = \frac{x_0^i}{m_i e^{r_i(T-t_0)} + p_i}$.

Для иллюстрации полученных решений рассмотрим игру четырех лиц на сети, структура которой показана на Рис. 1.

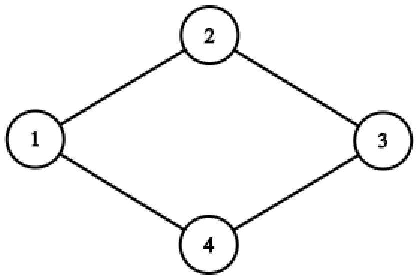

Рисунок 1. Игра четырех лиц на сети

В качестве параметров модели выберем: $a_1 = 1$, $a_2 = 1,5$, $a_3 = 1$, $a_4 = 0,5$, $c_1 = 10$, $c_2 = 18$, $c_3 = 9$, $c_4 = 13$, $b_1^2 = \frac{1}{8}$, $b_1^4 = \frac{1}{7}$, $b_2^1 = \frac{1}{2}$, $b_2^3 = 1$, $b_4^1 = \frac{1}{3}$, $b_4^3 = \frac{1}{4}$, $b_3^4 = \frac{1}{10}$, $b_3^2 = \frac{1}{8}$, $d_1 = \frac{1}{2}$, $d_2 = \frac{1}{3}$, $d_3 = 1$, $d_4 = \frac{1}{3}$, $q_1 = 4$, $q_2 = 5$, $q_5 = 2$, $q_4 = 4$, $x_0 = (1; 2; 2; 1,5)$, $T = 10$, $t_0 = 0$.

Таблица 1. Значения характеристических функций

S	$\overline{V}(S, x_0, T - t_0)$	$V(S, x_0, T - t_0)$
N	26,386	26,386
$\{1\}$	0,791	1,129
$\{2\}$	11,801	12,421
$\{3\}$	1,936	2,059
$\{4\}$	1,822	1,925
$\{1,2\}$	15,712	15,954
$\{1,3\}$	2,727	3,188
$\{1,4\}$	3,996	4,157
$\{2,3\}$	18,183	18,361
$\{2,4\}$	13,622	14,346
$\{3,4\}$	4,845	4,963
$\{1,2,3\}$	22,094	22,168
$\{1,2,4\}$	18,917	19,11
$\{1,3,4\}$	7,019	7,24
$\{2,3,4\}$	21,091	21,302

В Таблице 1 приведены полученные значения характеристической функции $\overline{V}(S, x_0, T-t_0)$, построенной согласно (4.14), и классической характеристической функции $V(S, x_0, T-t_0)$.

Вектор Шепли, построенный с помощью характеристической функции $\overline{V}(S, x_0, T-t_0)$, имеет вид:

$$\overline{Sh}(x_0, T-t_0) = (3,043; 15,584; 4,702; 3,057).$$

Вектор Шепли, построенный с помощью классической характеристической функции $V(S, x_0, T-t_0)$, имеет вид:

$$Sh(x_0, T-t_0) = (3,032; 15,71; 4,608; 3,036).$$

Дадим графическую интерпретацию полученных решений. Для этого, выражая $\xi_3 = \overline{V}(N, x_0, T-t_0) - \xi_1 - \xi_2 - \xi_4$, и переходя в системе неравенств для нахождения C-ядра к трём переменным, построим полученную область на графике. На Рис. 2 показаны области, соответствующие $C(x_0, T-t_0)$ – C-ядру, построенному с использованием $V(S, x_0, T-t_0)$, $\overline{C}(x_0, T-t_0)$ – C-ядру, построенному с использованием $\overline{V}(S, x_0, T-t_0)$, $\overline{C}_\lambda(x_0, T-t_0)$ – подмножеству дележей, полученному для всех $\lambda \in [0, 1]$ согласно Теореме 3.1, а также $\overline{Sh}(x_0, T-t_0)$ и $Sh(x_0, T-t_0)$.

Заметим, что вектор Шепли, построенный с помощью характеристической функции $\overline{V}(S, x_0, T-t_0)$, лежит в C-ядре, полученном с использованием классической характеристической функции, так же как и подмножество дележей $\overline{C}_\lambda(x_0, T-t_0)$.

5. Заключение

В данной работе исследован класс кооперативных дифференциальных игр на сетях. Предложена формула для расчета вектора Шепли и τ-вектора в таких играх. Показано, что если кооперативное решение основано на характеристической функции специального вида, то оно не требует вычисления значения характеристической функции для каждой коалиции $S \in N$. Рассмотрен наглядный пример, демонстрирующий этот результат.

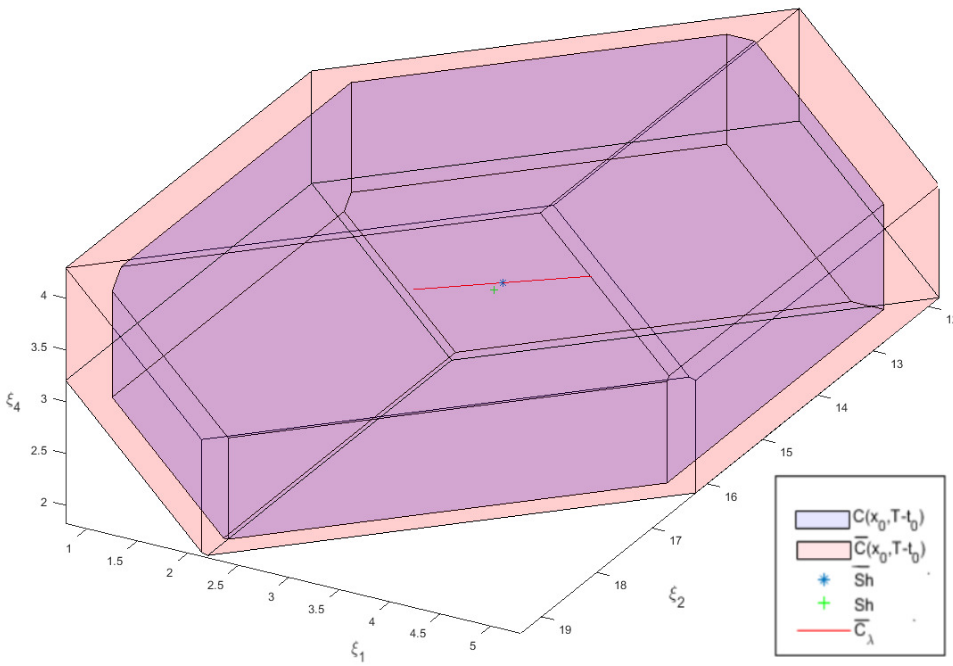

Рисунок 2. Кооперативные принципы оптимальности

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Новиков Д.А. *Игры и сети* // Математическая теория игр и ее приложения. 2010. Т. 2, вып. 1. С. 107–124.

2. Седаков А. *Динамические сетевые игры:* дис. ... д-ра физ.-мат. наук. Санкт-Петербургский. гос. университет, СПб, 2020.

3. Петросян Л.А. *Кооперативные дифференциальные игры на сетях* // Тр. ИММ УрО РАН. 2010. Т. 16, № 5, С. 143-–150.

4. Dockner E., Jørgensen S., Van Long N., and Sorger G. *Differential Games in Economics and Management Science*. Cambridge University Press, Cambridge, UK, 2000.

5. Gao H., Pankratova Ya. *Cooperation in Dynamic Network Games* // Contributions to Game Theory and Management. 2017. Vol. 10. P. 42–67.

6. Gillies D.B. *Solutions to general non-zero-sum games* // In: Tucker A.W., Luce R. D. (eds.) Contributions to the Theory of Games IV, Annals of Mathematics Studies 40. Princeton: Princeton University Press, 1959. P. 47–85.

7. Gromova E., Marova E., Gromov D. *A substitute for the classical Neumann–Morgenstern characteristic function in cooperative differential games* // Journal of Dynamics & Games. 2020. Vol. 7. N. 2. P. 105–122.

8. Громова Е.В., Петросян Л.А. *Об одном способе построения характеристической функции в кооперативных дифференциальных играх* // МТИиП. 2015. Т. 7, вып. 4. С. 19–39; Gromova E.V, Petrosyan L.A. *On an approach to constructing a characteristic function in cooperative differential games* // Autom Remote Control. 2017. Vol. 78. P. 98–118.

9. Jackson M.O., Zenou Y., *Games on Networks*. Handbook of Game Theory, Vol. 4, Peyton Young and Shmuel Zamir, eds., Elsevier Science, 2014.

10. Mazalov V., Chirkova J.V. *Networking Games: Network Forming Games and Games on Networks*. Academic Press, 2019.

11. Petrosyan L., Yeung D.. *Shapley value for differential network games: Theory and application* // Journal of Dynamics & Games, doi: 10.3934/jdg.2020021

12. Petrosyan L., Yeung D. *Construction of Dynamically Stable Solutions in Differential Network Games* // In: Tarasyev A., Maksimov V., Filippova T. (eds) Stability, Control and Differential Games. Lecture Notes in Control and Information Sciences - Proceedings. Springer, Cham. 2020.

13. Shapley L.S. *A value for n-person games* // In: Contributions to the Theory of Games, vol. 2, Annals of Mathematics Studies, 28, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1953.

14. Tijs S. *Bounds for the core of a game and the t-value* // In: Moeschlin O., Pallaschke D. (eds.) Game Theory and Mathematical Economics. Amsterdam: North-Holland Publishing Company. 1981. P. 123–132.

15. Tijs S. *An axiomatization of the t-value* // Mathematical Social Sciences. 1987. Vol. 13. N. 2. P. 177–181.

16. Von Neumann J. and Morgenstern O. *Theory of Games and Economic Behavior*. Princeton: Princeton University Press, 1953.

COOPERATIVE OPTIMALITY PRINCIPALS IN DIFFERENTIAL GAMES ON NETWORKS

Anna V. Tur, Saint Petersburg State University (a.tur@spbu.ru),
Leon A. Petrosyan, Saint Petersburg State University (l.petrosyan@spbu.ru).

Abstract: The paper describes a class of differential games on networks. The construction of cooperative optimality principles using a special type of characteristic function that takes into account the network structure of the game is investigated. The core, the Shapley value and the τ-value are used as cooperative optimality principles. The results are demonstrated on a model of a differential research investment game, where the Shapley value and the τ-value are explicitly constructed.

Keywords: differential games, games on networks, cooperative game.