Математическая Теория Игр и её Приложения, т.12, в.3, с. 50–88

УДК 519.866.2.
ББК 22.18

ГАРАНТИРОВАННЫЙ ДЕТЕРМИНИСТСКИЙ ПОДХОД К СУПЕРХЕДЖИРОВАНИЮ: НАИБОЛЕЕ НЕБЛАГОПРИЯТНЫЕ СЦЕНАРИИ ПОВЕДЕНИЯ РЫНКА И ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ

Сергей Н. Смирнов
Кафедра системного анализа
Факультет вычислительной математики и кибернетики
Московский государственный университет
им. М.В. Ломоносова
119992, Москва, ГСП-1, Воробьевы горы, МГУ
e-mail: s.n.smirnov@gmail.com

Для задачи суперрепликации с дискретным временем рассматривается гарантированная детерминистская постановка: задача состоит в гарантированном покрытии обусловленного обязательства по опциону при всех допустимых сценариях. Эти сценарии задаются при помощи априорно заданных компактов, зависящих от предыстории цен: приращения цены в каждый момент времени должны лежать в соответствующих компактах. Предполагается отсутствие транзакционных издержек. Постановка задачи носит теоретико-игровой характер и приводит к уравнениям Беллмана–Айзекса, как в чистых, так и в смешанных стратегиях «рынка». В настоящей статье предлагается двухшаговый метод решения уравнения Беллмана, возникающего в случае (игрового) равновесия. Результаты общей проблемы моментов применяются для решения задачи. В частности, наиболее неблагоприятные смешанные стратегии «рынка» можно искать в классе распределений, сосредоточенных не более чем в $n+1$ точке, где n – число рисковых активов.

Ключевые слова: гарантированные оценки, детерминистская динамика цен, суперрепликация, опцион, арбитраж, отсутствие арбитражных возможностей, уравнения Беллмана–Айзекса, многозначное отображение, смешанные стратегии, игровое равновесие, отсутствие торговых ограничений, риск-нейтральные меры, проблема моментов, универсальная измеримость.

Поступила в редакцию: 03.11.19 *После доработки*: 10.08.20 *Принята к публикации*: 29.09.20

1. Введение

В работе [9] подробно изложен гарантированный детерминистский подход, описаны модель финансового рынка, торговые ограничения и условия безарбитражности, а также поставлена задача суперхеджирования обусловленных обязательств по опционам, приведена соответствующая библиография. Здесь мы ограничимся минимальным описанием необходимых сведений, касающихся постановки задачи, приведенных в [9].

Основной посылкой в предлагаемом подходе является задание «неопределенной» динамики цен посредством предположения об априорной информации о движении цен[1] в момент времени t, а именно, что приращения ΔX_t дисконтированных цен[2] лежат в априорно заданных компактах $K_t(\cdot)$, где точкой обозначена предыстория цен до момента $t-1$ включительно, $t = 1, \ldots, N$. Обозначим через $v_t^*(\cdot)$ точную нижнюю грань для стоимости портфеля в момент времени t, при известной предыстории, гарантирующей, при определенном выборе допустимой хеджирующей стратегии, исполнение текущих и будущих обязательств, возникающих в отношении возможных выплат по американскому опциону. Соответствующие уравнения Беллмана-Айзекса в дисконтированных ценах возникают непосредственно из экономического смысла посредством выбора на шаге t «наилучшей»

---

[1] Приращения берутся «назад», т.е. $\Delta X_t = X_t - X_{t-1}$, где X_t вектор дисконтированных цен в момент времени t.

[2] Считаем, что безрисковый актив имеет постоянную цену, равную единице.

допустимой стратегии хеджирования $h \in D_t(\cdot)$ для «наихудшего» сценария $y \in K_t(\cdot)$ приращения (дисконтированных) цен для заданных функций $g_t(\cdot)$, описывающих потенциальные выплаты по опциону. Таким образом, получаем рекуррентные соотношения:[3]

$$\begin{gathered} v_N^*(\bar{x}_N) = g_N(\bar{x}_N), \\ v_{t-1}^*(\bar{x}_{t-1}) = g_{t-1}(\bar{x}_{t-1}) \bigvee \inf_{h \in D_t(\bar{x}_{t-1})} \sup_{y \in K_t(\bar{x}_{t-1})} \left[v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) - hy \right], \\ t = N, \dots, 1, \end{gathered} \tag{BA}$$

где $\bar{x}_{t-1} = (x_0, \dots, x_{t-1})$ описывает предысторию по отношению к настоящему моменту t. Условия для справедливости (BA) сформулированы в Теореме 3.1 из [9].

При этом удобно (формально) считать, что $g_0 = -\infty$ (отсутствие обязательств по выплатам в начальный момент времени); $g_t \geq 0$ для $t = 1, \dots, N$ в случае американского опциона. Множество $D_t(\cdot)$ предполагается выпуклым и $0 \in D_t(\cdot)$.

Многозначные отображения $x \mapsto K_t(x)$ и $x \mapsto D_t(x)$, а также функции $x \mapsto g_t(x)$, предполагаются заданными для всех $x \in (\mathbb{R}^n)^t$, $t = 1, \dots, N$. Поэтому функции $x \mapsto v_t^*(x)$ задаются уравнениями (BA) для всех $x \in (\mathbb{R}^n)^t$.

В уравнениях (BA) функции v_t^*, а также соответствующие точные верхние и нижние грани, принимают значения в расширенном множестве вещественных чисел $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\} = [-\infty, +\infty]$ – двухточечной компактификации[4] $\mathbb{R}$. При этом функции v_t^* ограничены сверху благодаря следующему предположению:

$$\begin{gathered} \text{найдутся константы } C_t \geq 0 \text{ такие, что для каждого } t = 1, \dots, N \\ \text{и всех возможных траекторий } \bar{x}_t = (x_0, \dots, x_t) \in B_t \text{ выполнено} \\ g_t(x_0, \dots, x_t) \leq C_t. \end{gathered} \tag{B}$$

Будем считать, что константы C_t выбраны минимальными, т.е.

$$C_t = \sup_{x \in B_t} g_t(x),$$

[3] Знак $\bigvee$ обозначает максимум, $hy = \langle h, y \rangle$ – скалярное произведение вектора h на вектор y.

[4] Окрестности точек $-\infty$ и $+\infty$ имеют вид $[\infty, a)$, $a \in \mathbb{R}$ и $(b, +\infty]$, $b \in \mathbb{R}$ соответственно.

и будем обозначать

$$C = \bigvee_{t=1}^{N} C_t. \tag{1.1}$$

Для удобства обозначений мы сделаем «аддитивную» замену в последней переменной функций v_t^*, полагая

$$w(\bar{x}_{t-1}, y) = w_t(x_1, \ldots, x_{t-1}, y) = v^*(x_1, \ldots, x_{t-1}, x_{t-1} + y), \tag{T}$$

и далее будем использовать уравнения Белмана–Айзекса в терминах функций w_t, $t = N, \ldots, 0$, т.е в виде:

$$v_{t-1}^*(\cdot) = g_{t-1}(\cdot) \bigvee \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{y \in K_t(\cdot)} \big[w_t(\cdot, y) - hy\big], \quad t = N, \ldots, 1.$$

Здесь и далее точкой обозначены «текущие» переменные; в данном случае аргументом является $\bar{x}_{t-1}$.

Траекторию на временном интервале $[0, t] = \{0, \ldots, t\}$ цен активов $(x_0, \ldots, x_t) = \bar{x}_t$ мы назовем возможной, если $x_0 \in K_0$, $x_1 \in K_1(x_0)$, $\ldots$, $x_t \in K_t(x_0, \ldots, x_{t-1})$; $t = 0, 1, \ldots, N$. Обозначим B_t – множество возможных траекторий цен активов на временном интервале $[0, t]$; тем самым

$$B_t = \big\{(x_0, \ldots, x_t) : x_0 \in K_0, \Delta x_1 \in K_1(x_0), \ldots, \Delta x_t \in K_t(x_0, \ldots, x_{t-1})\big\}. \tag{1.2}$$

Заметим, что (1.2) равносильно рекуррентным соотношениям[5]

$$\begin{aligned} B_t &= \big\{(\bar{x}_{t-1}, x_t) :\ \bar{x}_{t-1} \in B_{t-1}, \Delta x_t \in K_t(\bar{x}_{t-1})\big\} = \\ &= \big\{(\bar{x}_{t-1}, x_t) : \bar{x}_{t-1} \in B_{t-1}, x_t \in x_{t-1} + K_t(\bar{x}_{t-1})\big\},\ t = 1, \ldots, N. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Везде далее будем предполагать, что выполнены предположения, перечисленные в Теореме 3.1 из [9], а также предположения, перечисленные в пункте 1) Замечания 3.1 из [9].

В работе [10] изучаются понятия «безарбитражности» для детерминистской модели рынка — отсутствие гарантированного арбитража, отсутствие арбитражных возможностей, отсутствие гарантированного арбитража с неограниченной прибылью. Вводится понятие грубости (структурной устойчивости) «безарбитражности», получены критерии грубости.

---

[5] Здесь $x + A = \{z :\ z - x \in A\}$.

В статье [11] исследуются свойства полунепрерывности и непрерывности решений уравнений Беллмана-Айзекса (BA). При весьма слабом предположении «безарбитражности» рынка — грубом условии отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью, получен основной результат, касающийся «гладкости» решений уравнений (BA), — Теорема 3.2 о непрерывности $v_t^*(\cdot)$, $t = 0, \dots, N$.

В Предложении 2.1 из [11] приведены достаточные условия компактности B_t – достаточно полунепрерывности сверху компактнозначных отображений $x \mapsto K_t(\cdot)$, $t = 1, \dots, N$, а также достаточные условия для выполнения свойства (B) – в дополнение к полунепрерывности сверху $K_t(\cdot)$ требуется еще и полунепрерывность сверху $g_t(\cdot)$, $t = 1, \dots, N$.

В [12] для случая отсутствия торговых ограничений при условиях Теоремы 3.2 из [11], обеспечивающих непрерывность решений уравнений Беллмана-Айзекса, получены оценки модуля непрерывности, в частности для случая липшицевости.

В статье [13] вводится смешанное расширение чистых стратегий «рынка» и исследуются вопросы, связанные с существованием игрового равновесия и его следствиями.

Статья [14] посвящена игровому равновесию для случая отсутствия торговых ограничений, в предположении отсутствия арбитражных возможностей. Основным результатом статьи [14] является Теорема 1, которая представляет собой обобщение результата В.Н. Колокольцова — Теоремы 12.21 в [19].

В настоящей статье предлагается двухшаговый метод решения уравнений Беллмана-Айзекса для случая игрового равновесия (условия которого приводятся в [13] и [14]). Показано, что наиболее неблагоприятные смешанные стратегии рынка можно искать в классе распределений, сосредоточенных не более чем в $n + 1$ точке, где n — число рисковых активов. Установлена связь с общей проблемой моментов; этот метод может быть применен и для иных постановок задачи хеджирования обусловленных обязательств по опционам.

2. Двухшаговый метод решения уравнений Беллмана

Далее будем рассматривать класс $\mathcal{P}_t(\cdot)$ – смешанное расширение класса чистых стратегий.[6]

Обозначим, как и в [13],

$$\rho_t(\cdot) = \inf_{h \in D_t(\cdot)} \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \int \big[w_t(\cdot, y) - hy\big] Q(dy), \tag{2.1}$$

$$\rho'_t(\cdot) = \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \inf_{h \in D_t(\cdot)} \int \big[w_t(\cdot, y) - hy\big] Q(dy), \tag{2.2}$$

считая, что интегралы в (2.1) и (2.2) определены относительно меры Q; в случае, когда $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}^*(K_t(\cdot))$, условие измеримости не требуется, т.к. любая функция интегрируема.

Всегда имеет место неравенство

$$\rho_t(\cdot) \geq \rho'_t(\cdot), \tag{2.3}$$

а если для класса $\mathcal{P}_t(\cdot)$ имеет место равенство:

$$\rho_t(\cdot) = \rho'_t(\cdot), \tag{2.4}$$

то будем говорить, что в игре со смешанным расширением $\mathcal{P}_t(\cdot)$ имеет место (игровое) равновесие, а величину $\rho_t = \rho'_t$ будем называть значением игры.[7]

Величина $\rho_t(\cdot)$ входит в уравнения Беллмана–Айзекса для смешанных стратегий, которые можно записать в сокращенном виде (см. [13]):

$$\begin{gathered} v^*_N(\cdot) = g_N(\cdot), \\ v^*_{t-1}(\cdot) = g_{t-1}(\cdot) \vee \rho_t(\cdot), \text{ для } t = 1, \ldots, N. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Отметим, что в предположении (B) функции $\rho_t(\cdot)$ и $v^*_t(\cdot)$ ограничены сверху константой C, см. [13].

Интерес к (игровому) равновесию связан с тем, что при весьма общих предположениях относительно $K_t(\cdot)$, $D_t(\cdot)$ и $v_t(\cdot)$ равновесие (2.4) имеет место, а для $\rho'_t(\cdot)$ выражение (2.2) может быть упрощено

---

[6] В соответствии с терминологией из [13] в смешанное расширение входят только меры с носителем, содержащимся в $K_t(\cdot)$, и все меры, сосредоточенные в одной точке $y \in K_t(\cdot)$.

[7] В принципе, ρ_t может принимать значения $-\infty$; в этом случае в силу (2.3) $\rho'_t = -\infty$ и имеет место равновесие. На самом деле, $\rho_t(\cdot)$ и $\rho'_t(\cdot)$ принимают значения $-\infty$ одновременно, см. пункт 1) Замечания 3.5 из [13].

за счет явного выражения для точной нижней грани. Обозначим σ_A опорную функцию множества A, т.е.

$$\sigma_A(y) = \sup_{h \in A} hy.$$

Нам потребуется следующий простой результат из [13].

Предложение 2.1. *Пусть функции w_t и классы мер $\mathcal{P}_t(\cdot)$ таковы, что определены интегралы $\int w_t(\cdot, y)Q(dy)$ для любой меры $Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)$. Тогда*

$$\rho'_t(\cdot) = \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \left[\int w_t(\cdot, y)Q(dy) - \sigma_{D_t(\cdot)}\left(\int yQ(dy) \right) \right]. \tag{2.6}$$

В случае игрового равновесия (2.4), учитывая (2.6), естественно называть уравнения (2.5) уравнениями Беллмана, поскольку стратегии «хеджера» в них уже не будут присутствовать.

Опишем общий способ решения детерминистской задачи суперрепликации в предположении, что имеет место равновесие (2.4) для смешанного расширения $\mathcal{P}_t(\cdot)$. Тогда задача ценообразования сводится к уравнениям Беллмана (2.5), где $\rho = \rho'$ определяется при помощи формулы (2.6), т.е.

$$\begin{gathered} v_N^*(\cdot) = g_N(\cdot), \\ v_{t-1}^*(\cdot) = g_{t-1}(\cdot) \bigvee \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot)} \left[\int w_t(\cdot, y)Q(dy) - \sigma_{D_t(\cdot)}\left(\int yQ(dy) \right) \right], \\ t = 1, \dots, N, \end{gathered} \tag{2.7}$$

где функции w_t задаются соотношением (T) (во Введении).

Случай, когда $\operatorname{conv}(K_t(\cdot)) \cap \operatorname{bar}(D_t(\cdot)) = \emptyset$ рассматривался в [13]; он соответствует наличию SAUP – гарантированного арбитража с неограниченной прибылью. В этом случае имеет место равновесие, однако, хеджирование нецелесообразно, а рациональное поведение «хеджера» состоит в реализации арбитража. Поэтому, если имеет место равновесие (2.4), достаточно рассмотреть случай отсутствия гарантированного арбитража с неограниченной прибылью $NDSAUP$, т.е. когда $\operatorname{conv}(K_t(\cdot)) \cap \operatorname{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset$, что мы и будет предполагать далее.

Разобьем задачу нахождения точной верхней грани в формуле (2.7) на два этапа для каждого $t = 1, \dots, N$, начиная с $t = N$.

Этап 1. Для каждого $z \in \mathrm{conv}(K_t(\cdot)) \cap \mathrm{bar}(D_t(\cdot))$ решаем задачу условной оптимизации по $Q \in \mathcal{P}_t(\bar{x}_{t-1})$ при дополнительном ограничении $\int yQ(dy) = z$, т.е. находим

$$u_{t,\bar{x}_{t-1}}(z) = \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\bar{x}_{t-1}),\ \int yQ(dy)=z} \int w_t(\bar{x}_{t-1}, y)Q(dy); \qquad (2.8)$$

Этап 2. Решаем задачу максимизации по $z \in \mathrm{conv}(K_t(\bar{x}_{t-1})) \cap \mathrm{bar}(D_t(\bar{x}_{t-1}))$ функции $z \mapsto u_{t,\bar{x}_{t-1}}(z) - \sigma_{D_t(\bar{x}_{t-1})}(z)$, т.е. находим

$$\rho_t(\cdot) = \sup_{z \in \mathrm{conv}(K_t(\cdot)) \cap \mathrm{bar}(D_t(\cdot))} [u_{t,\cdot}(z) - \sigma_{D_t(\cdot)}(z)], \qquad (2.9)$$

и

$$v^*_{t-1}(\cdot) = g_{t-1}(\cdot) \bigvee \rho_t(\cdot). \qquad (2.9')$$

Что касается второго этапа, то для приложений типично задание $D_t(\cdot)$ в аналитической форме, что обычно позволяет явно найти опорную функцию этого множества, т.е. $\sigma_{D_t(\cdot)}(z)$ для $z \in \mathrm{bar}(D_t(\cdot))$. Это, в частности, относится к случаю 4) примера 1 из [9], в соответствии с формулой (10) из [9]:

$$D_t(\cdot) = \{h \in \mathbb{R}^n : \ hB_t(\cdot)h^T \le d^2\},$$

где $d = \frac{L}{\gamma} > 0$, $B_t(\cdot)$ – симметричная неотрицательно определенная матрица. Здесь $\mathrm{bar}(D_t(\cdot)) = \{y = B_t(\cdot)x,\ x \in \mathbb{R}^n\}$; для $z \in \mathrm{bar}(D_t(\cdot))$ имеем

$$\sigma_{D_t(\cdot)}(z) = d\sqrt{z^T B^+ z},$$

где B^+ – псевдообратная матрица.

Пример 2.1. Важный для приложений случай возникает при запрете коротких позиций по рисковым активам, т.е. когда $D_t(\cdot) = [0, \infty)^n$. Для этого случая

$$\sigma_{D_t(\cdot)}(z) = \begin{cases} 0 & z \in (-\infty, 0]^n \\ +\infty & z \notin (-\infty, 0]^n, \end{cases}$$

так что в данном случае барьерным конусом для $D_t(\cdot)$ является $\mathrm{bar}(D_t(\cdot)) \equiv (-\infty, 0]^n$. Задача оптимизации (2.7) приобретает вид

$$v_N^*(\cdot) = g_N(\cdot),$$

$$v_{t-1}^*(\cdot) = g_{t-1}(\cdot) \bigvee \sup_{Q \in \mathcal{P}_t(\cdot),\ \int yQ(dy) \in (-\infty,0]^n} \int w_t(\bar{x}_{t-1}, y) Q(dy), t = 1, .., N, \tag{2.10}$$

где $w_t(\bar{x}_{t-1}, y) = v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y)$, т.е. точная верхняя грань в (2.10) берется по классу вероятностных мер, для которых процесс цен будет супермартингалом для каждого рискового актива. Это соответствует нашей интерпретации наиболее неблагоприятного поведения рынка – в данном случае, в отношении занятия длинных позиций по рисковым активам. $\square$

Функция $z \mapsto u_{t,\cdot}(z)$ является вогнутой по Лемме 3.1, доказанной далее в этом параграфе. Поскольку опорная функция выпукла, то функция $z \mapsto u_{t,\cdot}(z) - \sigma_{D_t(\cdot)}(z)$ также вогнута; максимизация вогнутой функции на выпуклом множестве $\mathrm{conv}(K_t(\cdot)) \cap \mathrm{bar}(D_t(\cdot))$ является классической задачей.

Основное внимание сконцентрируем на задаче, возникающей на первом этапе. Начнем с анализа класса оптимальных смешанных стратегий в частном случае – в предположении о компактности торговых ограничений. В соответствии с Предложением 2 из статьи [13] имеет место равновесие (2.4), причем в качестве класса допустимых смешанных стратегий $\mathcal{P}_t(\cdot)$ можно выбрать $\mathcal{P}^*(K_t(\cdot))$ – класс всех распределений с конечным носителем, содержащимся в $K_t(\cdot)$. Оказывается, что для решения задачи (2.7) и ее первого этапа, т.е. задачи (2.8), достаточно проводить оптимизацию по более узкому классу распределений с носителем, содержащим не более чем $n + 1$ точку, что вытекает, например, из следующего общего результата теории антагонистических игр [15].

Теорема 2.1. *Пусть в антагонистической игре:*

1^0. *первый игрок выбирает чистые стратегии на пространстве X, компактном выпуклом подмножестве $\mathbb{R}^m$, $m \geq 1$, а второй игрок выбирает смешанную стратегию – распределение*[8]

[8] Распределение – синоним вероятностной меры на $(Y, \mathcal{A})$.

на непустом множестве Y, снабженном σ-алгеброй $\mathcal{A}$, содержащей все одноточечные подмножества Y.

2^0. *функция выигрыша $f(x, y)$, $x \in X$, $y \in Y$ такова, что для любого $y \in Y$ функции $x \mapsto f(x, y)$*

a) полунепрерывны снизу,

b) любые выпуклые комбинации функций из семейства $x \mapsto f(x, y)$, $y \in Y$ являются квазивыпуклыми[9].

Тогда:

1) *имеет место равенство*

$$\min_{x \in X} \sup_{y \in Y} f(x, y) = \sup_{Q \in \mathcal{P}^m(Y)} \min_{x \in X} \int f(x, y) Q(dy), \tag{2.11}$$

где $\mathcal{P}^m(Y)$ – класс всех вероятностных мер на Y, сосредоточенных не более чем в $m+1$ точке, т.е.

$$\mathcal{P}^m(Y) = \{Q = \sum_{i=1}^{m+1} q_i \delta_{y_i} : \ q \in S_m, \ y_i \in Y, \ i, \ldots, m+1\}, \tag{2.12}$$

где $S_m = \{q = (q_1, \ldots, q_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} : q_i \geq 0, i = 1, \ldots, m+1; \sum\limits_{i=1}^{m+1} q_i = 1\}$, а δ_y обозначает вероятностную меру, сосредоточенную в точке $y \in Y$.

2) *если, кроме того, Y компактное хаусдорфово топологическое пространство, а функции $y \mapsto f(x, y)$ полунепрерывны сверху для всех x, то supremum в обеих частях (2.11) можно заменить на maximum.*

---

[9] Т.е. функции вида $x \mapsto \sum\limits_{i=1}^{n} p_i f(x, y_i)$ для любого $p = (p_1, \ldots, p_n) \in S_{n-1}$, $n \geq 1$ и произвольных $y_i \in Y$, $i = 1, \ldots, n$ квазивыпуклы; в частности, функции $x \mapsto f(x, y)$, $y \in Y$ являются квазивыпуклыми. $f : X \mapsto \mathbb{R}^n$ квазивыпукла, если $f\left(\sum\limits_{i=1}^{m} q_i x_i\right) \leq \bigvee\limits_{i=1}^{m} f(x_i)$ для любых $x = (x_1, \ldots, x_m) \in X$, $q = (q_1, \ldots, q_m) \in S_{m-1}$. Квазивыпукость равносильна также тому, что множество $\{x : f(x) \leq a\}$ выпукло для любого $a \in \mathbb{R}$ (считая пустое множество выпуклым). Выпуклая функция, очевидно, квазивыпукла.

Для применения Теоремы 2.1 в случае, когда множества $D_t(\cdot)$ компактны, достаточно выбрать

$$X = D_t(\cdot),\ Y = K_t(\cdot),\ f(h,y) = w_t(\cdot, y) - hy. \tag{2.13}$$

3. Общая проблема моментов

Задача (2.8) относится к проблеме моментов,[10] что позволяет использовать соответствующие результаты этой теории, которые мы обсудим ниже.

Подчеркнем, что результат о том, что экстремум интеграла на классе вероятностных распределений с n моментными ограничениями можно искать среди дискретных распределений, сосредоточенных не более чем в $n+1$ точках, справедлив при весьма общих предположениях.

Пусть заданы числовые функции $f_0, f_1, \ldots, f_n$ с аргументом из множества X, причем эти функции измеримы относительно заданной σ–алгебры $\mathcal{A}$ подмножеств X. Обозначим $\mathcal{P}(X)$ класс всех вероятностных мер на $(X, \mathcal{A})$.

Проблема моментов является оптимизационной задачей следующего вида: найти точную верхнюю (или точную нижнюю) грань значений интеграла

$$\int f_0(x)\pi(dx) \tag{3.1}$$

для таких $\pi \in \mathcal{P}(X)$, что

$$\int f_j(x)\pi(dx) = z_j^*,\ j = 1, \ldots, n, \tag{3.2}$$

где z_j^* – заданные числа, $j = 1, \ldots, n$; соответствующее значение точной верхней грани обозначим через $I(z^*)$.

При этом обычно предполагается, что рассматриваются только те меры из $\mathcal{P}(X)$, для которых интегралы в (3.1) и (3.2) конечны. Кроме того, разумно предполагать, что система (3.2) совместима. В противном случае договоримся формально считать, что $I(z^*) = -\infty$.

---

[10] Эту задачу также называют проблемой Чебышева–Маркова, поскольку задача, поставленная П.Л. Чебышевым, решалась его учеником А.А. Марковом в диссертации [7].

Обозначим:

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_n(x)) \in \mathbb{R}^n;$$
$$\hat{f}(x) = (f_0(x), f_1(x), \ldots, f_n(x)) \in \mathbb{R}^{n+1};$$
$$z^* = (z_1^*, \ldots, z_n^*).$$

Достаточное условие совместности (3.2), очевидно, состоит в том, чтобы выполнялось условие

$$z^* \in \operatorname{conv}(f(X)); \tag{3.3}$$

в этом случае найдется выпуклая комбинация $\sum\limits_{i=1}^{k} q_i y^i = z^*$, $k \geq 1$, где $y^i \in f(X)$, $i = 1, \ldots, k$, так что для некоторых $x^i \in X$ имеем $y^i = f(x^i)$, $i = 1, \ldots, k$. Тем самым

$$z^* = \sum_{i=1}^{n} q_i \ f(x^i) = \int f \, d\pi^*$$

для

$$\pi^* = \sum_{i=1}^{k} q_i \delta_{x^i}, \ q = (q_1, \ldots, q_k) \in S_{k-1},$$

где

$$S_{n-1} = \{(p_1, \ldots, p_n) : \ \sum_{i=1}^{n} p_i = 1, \ p_i \geq 0, \ i = 1, \ldots, n\}.$$

При этом, по теореме Каратеодори, можно выбрать k не превосходящее $n+1$.

Нетривиальный результат, справедливый без каких-либо дополнительных предположений, состоит в том, что условие (3.3) является также и необходимым для совместности системы (3.2). Соответствующая теорема доказана[11] в работе [27], Теорема 2; схожие результаты были получены практически одновременно и независимо в работах [25] и [24].

---

[11] Несмотря на то, что теорема в этой работе доказывается для X, являющегося интервалом на вещественной прямой $\mathbb{R}$, как отмечает во введении сам автор, многие из рассуждений сохраняют силу для общего измеримого пространства. И в действительности, доказательство Теоремы 1 из [27], из которой легко следует Теорема 2, никак не использует специфику X.

Таким образом, получаем следующее равенство:[12]

$$\left\{ \int f \, d\pi : \ \pi \in \mathcal{P}(X), \ \int \|f\| \, d\pi < \infty \right\} = \left\{ \int f \, d\pi : \ \pi \in \mathcal{P}^n(X) \right\}, \tag{3.4}$$

где $\mathcal{P}^n(X)$ определяется посредством (2.12).

Обозначим

$$E(z) = \left\{ \pi \in \mathcal{P}(X) : \ \int f \, d\pi = z, \ \int \|f\| \, d\pi < \infty \right\}, \ z \in \mathbb{R}^n. \tag{3.5}$$

Множество $E(z)$ непусто тогда и только тогда, когда $z \in \operatorname{conv}(f(X))$; кроме того, $E(z)$ выпукло.

Лемма 3.1. *Функция*

$$I(z) = \sup_{\pi \in E(z)} \int f_0 \, d\pi, \ z \in \operatorname{conv}(f(X)) \tag{3.6}$$

является вогнутой.

Доказательство. В силу $E(z) \neq \emptyset$ имеем $I(z) > -\infty$ для всех $z \in \operatorname{conv}(f(X))$. Рассмотрим точки $z_1, z_2 \in \operatorname{conv}(f(X))$ и их выпуклую комбинацию $z = q_1 z_1 + q_2 z_2$, где $q_1, \ q_2 > 0$, $q_1 + q_2 = 1$. Отметим, что $E(z_i) \neq \emptyset \ i = 1, 2, \ldots$

Пусть $I(z_1) < \infty$ и $I(z_2) < \infty$; тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся вероятностные меры $\pi_1 \in E(z_1)$ и $\pi_2 \in E(z_2)$, такие что

$$\int f_0 \, d\pi_1 \geq I(z_1) - \varepsilon,$$
$$\int f_0 \, d\pi_2 \geq I(z_2) - \varepsilon.$$

Тогда для меры π, равной смеси π_1 и π_2 с весами q_1 и q_2, т.е. для $\pi = q_1 \pi_1 + q_2 \pi_2$, имеем

$$\int f \, d\pi = q_1 z_1 + q_2 z_2 = z,$$

т.е. $\pi \in E(z)$ и

$$I(z) \geq \int f_0 \, d\pi \geq q_1 I(z_1) + q_2 I(z_2) - \varepsilon.$$

[12] Выбор нормы произволен, поскольку любые две нормы в $\mathbb{R}^n$ эквивалентны.

В силу произвольности ε получаем неравенство

$$I(q_1z_1 + q_2z_2) \geq q_1I(z_1) + q_2I(z_2). \tag{3.7}$$

Если хотя бы одно из чисел $I(z_1)$ и $I(z_2)$ обращается в $+\infty$, например $I(z_1) = +\infty$, то для сколь угодно большого числа a найдется мера $\pi_1 \in E(z_1)$, такая что $I(z_1) \geq a$. Фиксируем какую-нибудь меру $\pi_2 \in E(z_2) \neq \emptyset$; тогда для смеси $\pi = q_1\pi_1 + q_2\pi_2$ имеем $\pi \in E(z)$ и

$$\int f_0\, d\pi = q_1 \int f_0\, d\pi_1 + q_2 \int f_0\, d\pi_2 \geq q_1a + q_2 \int f_0\, d\pi_2.$$

В силу произвольности a имеем $I(z) = +\infty$; тем самым неравенство (3.7) обращается в равенство. □

Замечание 3.1. Обозначим

$$V = \operatorname{conv}(f(X)) \subseteq \mathbb{R}^n,$$
$$V_{+\infty} = \{z \in V :\ I(z) = +\infty\},$$
$$V_{<\infty} = \{z \in V :\ I(z) < +\infty\}.$$

Из доказательства Леммы 3.1 можно сделать вывод, что $V_{<\infty}$ и $V_{+\infty}$ являются выпуклыми множествами (считая пустое множество выпуклым). При этом $V_{<\infty}$ и $V_{+\infty}$ не пересекаются и в объединении дают V.

Возможно три случая:

1) $V_{+\infty} = V$ и $V_{<\infty} = \emptyset$.

Например, выберем $n = 1$, $X = \mathbb{R}$ с борелевской σ–алгеброй, $f_1(x) = x$, $f_0(x) = x^2$.

2) $V_{+\infty} = \emptyset$ и $V_{<\infty} = V$.

Например, выберем $n = 1$, $X = [0, 1]$ с борелевской σ–алгеброй, $f_1(x) = x$, $f_0(x) = x^2$.

3) $V_{+\infty} \neq \emptyset$ и $V_{<\infty} \neq \emptyset$. В этом случае $V_{<\infty}$ содержится в относительной границе $V_{+\infty}$, поскольку если $z \in V_{<\infty}$ и $z' \in V_{+\infty}$, то $qz + q'z' \in V_{+\infty}$ для $q' > 0$, $q + q' = 1$. Следовательно, по Следствию 6.3.3 [26] выпуклое подмножество $V_{<\infty}$ границы выпуклого множества $V_{+\infty}$ имеет меньшую размерность, т.е. $dim(V_{<\infty}) < dim(V_{+\infty})$. По Теореме 11.6 [26], примененной к замыканию $\overline{V}_{+\infty}$ множества $V_{+\infty}$ и к $V_{<\infty} \subseteq \overline{V}_{+\infty}$, найдется опорная к $\overline{V}_{+\infty}$ (а значит и к $V_{+\infty}$) гиперплоскость, содержащая $V_{<\infty}$.

Например, положим $n = 1$, $X = [0, \infty)$, $f_1(x) = x$, $f_0(x) = x^2$; здесь $I(z) = +\infty$ при $z > 0$ и $I(0) = 0$.

Вернемся к рассмотрению произвольного измеримого пространства $(X, \mathcal{A})$. Применим теперь (3.4) не к функции f, а к функции $\hat{f}$. Тогда для $z \in \operatorname{conv}(f(X))$ и $\pi \in E(z)$ имеем

$$\int \hat{f}\, d\pi = \left(\int f_0\, d\pi, z \right) \in \operatorname{conv}(\hat{f}(X)) \subseteq \mathbb{R}^{n+1}.$$

Тем самым найдутся $x_1, \ldots, x_k$ из X, такие что

$$\int \hat{f}(x) d\pi = \int \hat{f}(x) d\pi^*,$$

где $\pi^* = \sum\limits_{i=1}^{k} q_i \delta_{x_i}$, $q = (q_1, \ldots, q_k) \in S_{k-1}$, $k \geq 1$. Поэтому задачу оптимизации (3.1) при условиях (3.2) достаточно решать в классе мер $\mathcal{P}^*(X)$, сосредоточенных в конечном числе[13] точек X. На самом деле, достаточно ограничиться классом $\mathcal{P}^n(X)$ мер, сосредоточенных не более чем в $n+1$ точке из X, что вытекает из следующих рассуждений.

Пусть далее выполняется условие (3.3). Обозначим

$$E^*(z^*) = \left\{ \pi \in \mathcal{P}^*(X) : \int f\, d\pi = z^* \right\}.$$

Очевидно, множество $E^*(z^*)$ является непустым выпуклым множеством. Таким образом, требуется найти

$$I(z^*) = \sup_{\pi \in E^*(z^*)} \int f_0(x) \pi(dx) = \sup_{\substack{k=1,2,\ldots \\ x^1,\ldots,x^k \in X}} \left[\max_{q \in L_k^n(x^1,\ldots,x^k; z^*)} \sum_{i=1}^{k} q_i f_0(x^i) \right],$$
$$L_k^n(x^1, \ldots, x^k; z^*) = \left\{ q \in S_{k-1} : \sum_{i=1}^{k} q_i f_j(x^i) = z_j^*, j = 1, \ldots, n \right\}. \tag{3.8}$$

Максимизация выражения в квадратных скобках равенства (3.8) есть стандартная задача линейного программирования. Хорошо из-

[13] Равенство (3.4), примененное не к f, а к $\hat{f}$, позволяет свести число точек, необходимое для решения оптимизационной задачи, до $n + 2$.

вестный «фольклорный» результат из теории линейного программирования заключается в том, что решение задачи

$$\max_{p_1,\dots,p_k} \sum_{i=1}^{k} p_i f_0(x^i) \tag{3.9}$$

при условиях:

$$\begin{cases} p_i \geq 0,\ i = 1,\dots,k \\ \sum\limits_{i=1}^{k} p_i = 1 \\ \sum\limits_{i=1}^{k} p_i f_j(x^i) = z_j^*,\ i = 1,\dots,n \end{cases} \tag{3.10}$$

достаточно искать среди векторов p, у которых не более чем $n+1$ ненулевых компонент p_i (см., например, [2], гл. II, §11, Теорема VIII).

Идея доказательства заключается в том, что множество допустимых значений $p = (p_1,\dots,p_k)$, удовлетворяющих ограничениям (3.10), в данном случае является ограниченным, и поэтому оно также является компактным выпуклым множеством (более того, многогранником), а решение задачи (3.9) достигается в крайних точках этого множества[14]; при этом у крайней точки не может быть более $n+1$ ненулевых компонент.

Если бы у крайней точки имелось $l > n+1$ ненулевых компонент $p_i > 0,\dots,p_i > 0$, то поскольку однородная линейная система из $n+1$ уравнений:

---

[14] Это следствие теоремы Крейна–Мильмана; каждая точка выпуклого компакта является выпуклой комбинацией крайних точек этого компакта. При помощи этой теоремы доказательство того, что квазивыпуклая функция f достигает на выпуклом компакте K максимума на множестве $\mathrm{ext}(K)$ крайних точек K, занимает две строчки: для произвольного $x \in K$ найдутся $q = (q_1,\dots,q_m) \in S_{m-1}$ и $x_1,\dots,x_m \in \mathrm{ext}(K)$, такие что $x = \sum\limits_{i=1}^{m} q_i x_i$, откуда $f(x) = f\left(\sum\limits_{i=1}^{m} q_i x_i\right) \leq \bigvee\limits_{i=1}^{m} f(x_i)$. Интересно, что работа Крейна и Мильмана [23] появилась в 1940 году, практически одновременно с работой Канторовича 1939 года [4], где впервые были предложены практические приложения линейного программирования.

$$\sum_{m=1}^{l} u_{i_m} = 0,$$

$$\sum_{m=1}^{l} u_{i_m} f_i(x^{i_m}) = 0,\ j = 1, \ldots, n$$

имеет нетривиальное решение, при этом вектор $(u_{i_1}, \ldots, u_{i_l}) \neq 0$ можно выбрать сколь угодно близким нулевому вектору. Тогда, выбрав достаточно малое решение и положив $u_i = 0$ для $i \notin \{i_1, \ldots, i_l\}$, получим, что для вектора $u = (u_1, \ldots, u_n)$ вектора $p+u$ и $p-u$ также удовлетворяют ограничениям, из чего следует, что $p = \frac{1}{2}(p+u)+\frac{1}{2}(p-u)$, т.е. p не является крайней точкой.

Обозначим теперь

$$E^m(z^*) = \left\{\pi \in \mathcal{P}^m(X) : \int f\, d\pi = z^*\right\}. \tag{3.11}$$

Замечание 3.2. Полезные для решения задачи (2.8) результаты из общей теории проблемы моментов можно резюмировать следующим образом.

1) Система ограничений (3.2) совместна тогда и только тогда, когда выполнено (3.3).

2) Для совместной системы ограничений (3.2) *supremum* интеграла (3.1) может быть найден в классе вероятностных мер, сосредоточенных не более чем в $n+1$ точке, т.е.

$$I(z^*) = \sup_{\pi \in E^n(z^*)} \int f_0(x)\pi(dx), \tag{3.12}$$

где $E^n(z^*)$ задано при помощи (3.11).

3) Если X – компактно, а функции f_i, $j = 1, \ldots, n$ непрерывны, то $E^n(z^*)$ компактно в слабой топологии на пространстве мер на $(X, \mathcal{A})$. Если, кроме того, функция f_0 полунепрерывна сверху, то *supremum* в (3.12) достигается.

В качестве следствия пунктов 1) и 2) Замечания 3.2 получаем следующее утверждение, уточняющее результаты, полученные в [13] и [14], а именно, класс смешанных стратегий «рынка» можно сузить до $\mathcal{P}^n(K_t(\cdot))$ — класса всех распределений на $K_t(\cdot)$, сосредоточенных не более чем в $n+1$ точке.

Теорема 3.1.

1) *Пусть множества*[15] $D_t(\cdot)$ *компактны. Тогда для класса* $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}^n(K_t(\cdot))$ *имеет место равновесие* (2.4). *При этом точная нижняя грань в* (BA) *достигается для некоторого* $h_t^*(\cdot) \in D_t(\cdot)$.

2) *В случае отсутствия торговых ограничений, т.е. когда* $D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n$, *в предположении отсутствия арбитражных возможностей* $NDAO$, *имеет место равновесие* (2.4), *причем точная нижняя грань в* (BA) *достигается для некоторого* h^*, *и для* $\mathcal{P}_t(\cdot) = \mathcal{P}^n(K_t(\cdot))$ *выполняется равенство*[16]

$$\rho_t(\cdot) = \sup_{Q \in \mathcal{P}^n(K_t(\cdot)), \int yQ(dy)=0} \int w_t(\cdot, y)Q(dy). \tag{3.13}$$

3) *Пусть для* $t = 0, \ldots, N$ *функции Беллмана-Айзекса* $v_t^*(\cdot)$ *полунепрерывны сверху*[17].

Тогда

а) имеет место равновесие (2.4) с классом $\mathcal{P}_t(\cdot)$ равным[18] $\mathcal{P}(K_t(\cdot))$, причем в этом случае точная верхняя грань в (2.7) достигается для некоторого $Q_t^*(\cdot) \in \mathcal{P}^n(K_t(\cdot))$;

б) если при этом $D_t(\cdot)$ компактно, то значение игры достигается

---

[15] Напомним, что мы предлагаем, что множества $D_t(\cdot)$ выпуклые и содержат точку 0.

[16] Равенство (3.13) можно интерпретировать следующим образом: оптимальное поведение «рынка» можно ограничить классом распределений, при котором цены образуют мартингал, а условные распределения приращений цен сосредоточены в конечном числе точек (на самом деле, можно показать, что достаточно рассматривать распределения приращений цен, сосредоточенные не более чем в $n+1$ точке). Тем самым, получаем игровую интерпретацию риск-нейтральных мер, как наиболее неблагоприятных при отсутствии торговых ограничений (см. обсуждение экономической интерпретации в [29]).

[17] Достаточные условия полунепрерывности сверху функций v_t^* приведены в [11], Теорема 2.5.

[18] Здесь $\mathcal{P}(K_t(\cdot))$ – множество всех вероятностных мер на $K_t(\cdot)$ с борелевской σ-алгеброй.

для некоторой седловой точки – оптимальной пары $h_t^*(\cdot) \in D_t(\cdot)$, $Q_t^*(\cdot) \in \mathcal{P}^n(K_t(\cdot))$и значение игры конечно.

Доказательство. Пункты 1), 2) и 3) вытекают из приведенных выше рассуждений о характере решений общей проблемы моментов, применительно к решению задачи (2.8) на этапе 1. В пункте 3) также следует использовать слабую компактность классов $\mathcal{P}^n(K_t(\cdot))$, $t = 1, \dots, N$. □

Вернемся снова к проблеме моментов (3.1), (3.2) и будем предполагать, что система (3.2) совместна. Обозначим $f_{n+1} = I_X$, где I_A – индикатор множества A (т.е. функция f_{n+1} тождественно равна единице); при этом $\int f_{n+1} d\pi = 1$ для всех $\pi \in \mathcal{P}(X)$. Отметим, что фактически проблему моментов для вероятностных мер можно сформулировать как частный случай проблемы моментов для произвольных мер, когда требуется найти $supremum$ (или $infimum$)

$$\int f_0 \, d\mu$$

при условиях

$$\begin{cases} \int f_i \, d\mu = z_j^*, & j = 1, \dots, n; \\ \int f_{n+1} \, d\mu = 1. \end{cases} \tag{3.14}$$

Предположим, что функция f_{n+1} не выражается линейно через f_j, $j = 1, \dots, n$; это равносильно $\operatorname{rang}(f_1, \dots, f_n, f_{n+1}) = \operatorname{rang}(f_1, \dots, f_n) + 1$, где $\operatorname{rang}(\cdot)$ обозначает ранг системы функций (в смысле линейной алгебры). Пусть $\operatorname{rang}(f_1, \dots, f_n, f_{n+1}) = k + 1 \le n + 1$, тогда найдутся индексы $j_1, \dots, j_k$, такие что функции $f_{j_1}, \dots, f_{j_k}$ линейно независимы и для $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j_1, \dots, j_k\}$

$$f_j = \sum_{m=1}^{k} \alpha_{j_m} f_{j_m} + \alpha_{n+1} f_{n+1}.$$

Это означает, что для таких j условия $\int f_j \, d\mu = z_j^*$ являются следствием условий (3.14) с $k + 1$ ограничениями с функциями f_j, отвечающими индексам $j \in \{j_1, \dots, j_k, n + 1\}$, поскольку автоматически для $j \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j_1, \dots, j_k\}$

$$\int f_j \, d\mu = \sum_{m=1}^{k} \alpha_{j_m} z_j^* + \alpha_{n+1}.$$

Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $f_1, \ldots, f_{n+1}$ линейно независимы,[19] что соответствует невырожденности $f(X) \subseteq \mathbb{R}^n$, в том смысле, что размерность аффинной оболочки $f(X)$ равна n, т.е. $f(X)$ не содержится в какой-либо гиперплоскости.[20] Это также равносильно тому, что $\mathrm{conv}(f(X))$ имеет непустую внутренность; если это условие выполняется, будем говорить, что имеет место случай общего положения.

По аналогичным соображениям разумно предполагать, что f_0 не выражается линейно через $f_1, \ldots, f_n, f_{n+1}$. В противном случае $\int f_0 d\pi$ принимает постоянное значение на $E(z^*)$ (тем самым задача вырождается), поскольку тогда найдется вектор $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1}$, такой что $f_0(x) = \sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j f_j(x)$ для всех $x \in X$, откуда

$$I(z^*) = \int f_0 \, d\pi = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j z_j^* + \lambda_{n+1}$$

для всех мер $\pi \in \mathcal{P}(X)$, таких что $\int \|f\| \, d\pi < \infty$.

Опишем теперь метод, восходящий к Маркову, который позволяет зачастую решать проблему моментов при помощи рассуждений геометрического характера. Рассмотрим случай общего положения (когда $\mathrm{conv}(f(X))$ имеет непустую внутренность). Обозначим

$$B = \{(z_0, z) : \ z_0 \le I(z), \ z \in \mathrm{conv}(f(X))\}.$$

Очевидно, $B \supseteq \hat{f}(X)$ и, поскольку по Лемме 3.1 функция I вогнута, то B – выпуклое подмножество $\mathbb{R}^{n+1}$, имеющее непустую внутренность. Предположим, что $I(z) < \infty$ для всех $z \in \mathrm{conv}(f(X))$, тогда

---

[19] Для этого, разумеется, необходимо, чтобы X содержало не менее $n+1$ точек.

[20] Если $f(X)$ содержится в некоторой гиперплоскости, найдутся $(\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \neq 0 \in \mathbb{R}^n$ и $\beta \in \mathbb{R}$, такие что $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j f_j(x) = \beta$ для всех $x \in X$. Это означает, что $\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j f_j = 0$ для $\lambda_j = \alpha_j$, где $j = 1, \ldots, n$, и $\lambda_{n+1} = -\beta$, т.е. $f_1, \ldots, f_{n+1}$ линейно зависимы. Обратно, если $\sum_{j=1}^{n+1} \lambda_j f_j = 0$ для некоторого вектора $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n, \lambda_{n+1}) \neq 0 \in \mathbb{R}^{n+1}$, то $(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \neq 0 \in \mathbb{R}^n$, т.к. в противном случае λ_{n+1} также обращается в ноль, так что достаточно выбрать $\alpha_i = \lambda_i$, где $i = 1, \ldots, n$, и $\beta = -\lambda_{n+1}$.

точки $(I(z),z)$, где $z\in\mathrm{conv}(f(X))$, являются граничными точками B, поэтому в каждой такой точке можно построить опорную гиперплоскость L_z вида:

$$L_z=\Big\{(z_0,z):\ \sum_{j=0}^{n}\beta_j z_j=\gamma\Big\}. \tag{3.15}$$

Нас будет интересовать случай, когда в (3.15) выполнено $\beta_0\neq 0$; тогда, обозначая

$$\alpha_{n+1}=\frac{\gamma}{\beta_0},\ \alpha_j=-\frac{\beta_j}{\beta_0},\ j=1,\ldots,n,$$

имеем

$$L_z=\Big\{(z_0,z):\ \sum_{j=1}^{n}\alpha_j z_j+\alpha_{n+1}=z_0\Big\}. \tag{3.16}$$

Достаточным условием для $\beta_0\neq 0$ в (3.15) является условие $z\in\mathrm{int}(\mathrm{conv}(f(X)))$, где $\mathrm{int}(\cdot)$ обозначает внутренность множества.

Для $\alpha=(\alpha_1,\ldots,\alpha_n,\alpha_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}$ следующие утверждения равносильны:

1) Вектор α определяется равенством из (3.16), где L_z – опорная к B в точке $(I(z),z)$ гиперплоскость;

2) Имеет место неравенство

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j z_j+\alpha_{n+1}\geq I(z)\ \text{для всех}\ z\in\mathrm{conv}(f(X)); \tag{3.17}$$

3) Имеет место неравенство

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\int f_j\,d\pi+\alpha_{n+1}\geq\int f_0 d\pi$$
$$\text{для всех}\ \pi\in\mathcal{P}(X):\ \int\|f\|d\pi<\infty; \tag{3.18}$$

4) Имеет место неравенство

$$\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\,f_j(x)+\alpha_{n+1}\geq f_0(x)\ \text{для всех}\ x\in X. \tag{3.19}$$

Равносильность 1) и 2) тривиальна; также очевидна равносильность 2) и 3); 3), очевидно, вытекает из 4), а 4) вытекает из 3), если положить $\pi = \delta_x,\ x \in X$.

Обозначим

$$A = \{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n, \alpha_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} :\ \sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, f_j(x) + \alpha_{n+1} \geq f_0(x)\}. \tag{3.20}$$

Множество A, очевидно, выпукло и замкнуто.

Таким образом, получаем следующий результат, который был открыт независимо Рихтером [25], Исии [21] и Карлином (см. [5]).

Теорема (Рихтер–Исии–Карлин). Пусть $I(z) < \infty$ для всех $z \in \operatorname{conv}(f(X))$ и $\operatorname{int}(\operatorname{conv}(f(X))) \neq \emptyset$. Тогда для $z \in \operatorname{int}(\operatorname{conv}(f(X)))$

$$I(z) = \inf_{\alpha \in A} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, z_j + \alpha_{n+1} \right), \tag{3.21}$$

где I задается (3.5) и (3.6), A задается посредством (3.20). При этом $infimum$ в (3.21) достигается для некоторого $\alpha^* = \alpha^*(z) \in A$.

Введем функцию f^*, которую будем называть (верхней) огибающей (функции f_0 относительно системы функций $\{f_1, \ldots, f_n, f_{n+1}\}$):

$$f^*(x) = \inf_{\alpha \in A} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j\, f_j(x) + \alpha_{n+1} \right). \tag{3.22}$$

Замечание 3.3.

1) Если огибающая f^* измерима, то имеем в условиях теоремы Рихтера–Исии–Карлина:

$$I(z) = \sup_{\pi \in E(z)} \int f_0\, d\pi = \sup_{\pi \in E(z)} \int f^*\, d\pi. \tag{3.23}$$

Таким образом, для нахождения $supremum$ в (3.23) можно заменить функцию f_0 на ее огибающую f^*.

Действительно, фиксируя $z \in \operatorname{int}(\operatorname{conv}(f(X)))$, имеем неравенства

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^*\, f_j(x) + \alpha_{n+1}^* \geq f^*(x) \geq f_0(x),$$

откуда получаем

$$\sup_{\pi\in E(z)} \int \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^* f_j + \alpha_{n+1}^* \right) d\pi = \sup_{\pi\in E(z)} \int f^* \, d\pi = \sup_{\pi\in E(z)} \int f_0 \, d\pi = I(z),$$

используя то, что для любого $\pi \in E(z)$

$$\int \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j^* \, f_j + \alpha_{n+1}^* \right) d\pi = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j^* \, z_j + \alpha_{n+1}^*.$$

2) Для того чтобы $I(z) < \infty$ для всех $z \in \operatorname{conv}(f(X))$ в случае общего положения, т.е. когда $\operatorname{int}(\operatorname{conv}(f(X))) \neq \emptyset$, достаточно, чтобы функция I была конечна в $n+1$ аффинно-независимых точках из $\operatorname{conv}(f(X))$.

Действительно, при сделанном предположении случаи 1) и 3) из Замечания 3.1 отпадают.

3) Если множества A, определяемое (3.20), непусто, то $I(z) < \infty$ для всех $z \in \operatorname{conv}(f(X))$.

Действительно, в этом случае для $\alpha \in A$ имеем $f_0(x) \le \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j f_j(x) + \alpha_{n+1}$, так что $\int f_0 \, d\pi \le \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j z_j + \alpha_{n+1}$ для всех мер $\pi \in E(z)$.

Отметим, что в общем случае нельзя гарантировать измеримость множества $f(X)$; то же относится и к $\operatorname{conv}(f(X))$. Условия для универсальной измеримости этих множеств рассматриваются ниже.

4. Измеримость в общей проблеме моментов

Пусть $f : X \mapsto Y$ измеримое отображение, где X – польское пространство с борелевской σ – алгеброй $\mathcal{A}$, Y – сепарабельное метрическое пространство с борелевской σ – алгеброй $\mathcal{B}$, π – мера на $(X, \mathcal{A})$.

Лемма 4.1.

1) Найдется борелевское множество $X' \in \mathcal{A}$, такое что $\pi(X') = 1$ и $f(X') \in \mathcal{B}$. Другими словами, $f(X') \in \mathcal{B}_\pi$, где $\mathcal{B}_\pi$ – пополнение $\mathcal{B}$ относительно меры π.

2) Множество X' может быть выбрано таким образом, чтобы оно было бы представимо в виде счетного объединения компактов[21]

[21] В частности, X' имеет тип F_σ, т.е. оно представимо в виде счетного объеди-

и одновременно его образ $f(X')$ также был бы представим в виде счетного объединения компактов.

Доказательство. Достаточно воспроизвести рассуждения из работы [28] с незначительной модификацией. Известно, что вероятностная мера π на борелевской σ–алгебре $\mathcal{A}$ польского пространства X является плотной, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется компакт K_ε, такой что $\pi(K_\epsilon) \geq 1 - \varepsilon$, см., например, книгу [20], Теорема 2.5.11. Класс $\mathcal{K}$ всех компактных подмножеств X может быть выбран в качестве компактного класса[22], аппроксимирующего снизу борелевские множества относительно любой меры на $(X, \mathcal{A})$, см., например, Теорему 2.5.10 из [20]; любая мера на $(X, \mathcal{A})$, тем самым компактна по определению. По Теореме 2 из [28] компактная мера квазикомпактна[23]. В соответствии с Теоремой 1 из [28] мера квазикомпактна тогда и только тогда, когда она совершенна[24]. Для того, чтобы получить требуемое утверждение, достаточно в доказательстве необходимости Теоремы 1 из [28] выбрать в качестве I_n не интервалы с рациональными концами, а счетную базу в пространстве Y, например, шары с центрами в счетном и всюду плотном множестве и рациональными радиусами.

Однако можно также предложить весьма простое альтернативное доказательство Леммы. Для этого достаточно воспользоваться одним из вариантов теоремы Лузина, см., например, книгу [20], Теорема

нения замкнутых множеств. Любое F_σ – подмножество $\mathbb{R}^n$ представимо в виде счетного объединения компактов (поскольку $\mathbb{R}^n$ является σ–компактным пространством).

[22] Компактный класс – класс подмножеств некоторого пространства Ω, такой что любое счетное семейство множеств из этого класс с пустым пересечение содержит конечное подсемейство с пустым пересечением.

[23] Нормированная мера π на произвольном измеримом пространстве $(\Omega, \mathcal{F})$ квазикомпактна, если для любой счетной последовательности $A_n \in \mathcal{F}$, $n = 1, 2, \ldots$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется $B \in \mathcal{F}$, такое что $\{A_n \cap B,\ n = 1, 2, \ldots\}$ образует компактный класс.

[24] См. определение и критерии для совершенной меры в статье В.В. Сазонова в математической энциклопедии 1985 г. на тему “Совершенная мера” [8]. Одно из эквивалентных определений (использованное Рыль-Нарджевским) состоит в том, что мера π на $(\Omega, \mathcal{F})$ является совершенной, если для любого измеримого отображения $f : \Omega \mapsto \mathbb{R}$, где вещественная прямая $\mathbb{R}$ снабжена борелевской σ–алгеброй $\mathcal{B}$, найдется $\Omega' \in \mathcal{F}$, такое что $\pi(\Omega') = 1$ и $f(\Omega') \in \mathcal{B}$.

2.5.15: при сделанных предположениях относительно X, Y, f и π для любого ε найдется компакт K_ε, такой что $\pi(K_\varepsilon) \geq 1-\varepsilon$ и сужение $f|_{K_\varepsilon}$ функции f на K_ε является непрерывным.

Выберем теперь последовательность чисел $\varepsilon_n \mapsto 0$ и положим $X' = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} K_{\varepsilon_n}$. Тогда $\pi(X') = 1$ и

$$f(X') = f\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} K_{\varepsilon_n}\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f(K_{\varepsilon_n}) = \bigcup_{n=1}^{\infty} f|_{K_{\varepsilon_n}}(K_{\varepsilon_n}).$$

Осталось заметить, что непрерывный образ компакта компактен. $\square$

Пусть A_n, $n = 1, 2, \ldots$ – некоторая последовательность множеств. Будем использовать обозначение $A_n \uparrow A$ в случае, когда $A_n \subseteq A_{n+1}$, $n = 1, 2, \ldots$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} A_n = A$.

Лемма 4.2. *Если* $A_n \uparrow A$, *то* $\mathrm{conv}(A_n) \uparrow \mathrm{conv}(A)$.

Доказательство. Поскольку для любого $n = 1, 2, \ldots$ $\mathrm{conv}(A_n) \subseteq \mathrm{conv}(A)$, то $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} \mathrm{conv}(A_n) \subseteq \mathrm{conv}(A)$. Покажем противоположное включение: $x \in \mathrm{conv}(A)$ равносильно существованию целого $m \geq 0$, $q \in S_m = \{(q_1, \ldots, q_{m+1}) \in \mathbb{R}^{m+1} : \ q_i \geq 0, i = 1, \ldots, m+1; \ \sum\limits_{i=1}^{m} q_i = 1\}$, $x_i \in A_{n_i}$, $i = 1, \ldots, m+1$, таких что $x = \sum\limits_{i=1}^{m} q_i x_i$. Полагая $N = \bigvee\limits_{i=1}^{m+1} n_i$, имеем $x_i \in A_N$, для $i = 1, \ldots, m$, так что $x \in \mathrm{conv}(A_N)$. Тем самым, $\mathrm{conv}(A) \subseteq \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{conv}(A_n)$. $\square$

Следствие 1. Если $Y = \mathbb{R}^n$, то conv $f(X')$ является измеримым относительно $\mathcal{B}$.

Действительно, в соответствии с Леммой 4.1, если $f(X') = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i$, $i = 1, 2, \ldots$, где $K_i \subseteq K_{i+1}$, K_i – компакты[25], тогда, применяя Лемму 4.2, получаем, что conv $f(X') = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \mathrm{conv}(K_i)$, а выпуклая оболочка компакта[26], содержащегося в $\mathbb{R}^n$, сама компактна, т.е. conv $f(X')$ представимо в виде счетного объединения компактов.

[25] Конечное объединение компактов – компакт, поэтому последовательность можно считать, не ограничивая общности, монотонной, т.е. $K_i \uparrow f(X')$.

[26] Компактность выпуклой оболочки компакта – свойство конечномерного пространства, которое перестает быть справедливым в бесконечномерном случае.

Лемма 4.3. *Пусть* $(\mathbb{R}^d, \mathcal{B}^d, Q)$ *вероятностное пространство с борелевской* σ *– алгеброй* $\mathcal{B}^d$ *и для* $B \in \mathcal{B}^d$ *выполнено* $Q(B) = 1$*. Если интеграл* $\int x\, Q(dx)$ *конечен*[27]*, то*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^d} x\, Q(dx) \in \operatorname{conv}(B).$$

Доказательство. [28] Обозначим

$$y = \int\limits_{\mathbb{R}^d} x\, Q(dx).$$

Заметим, что $y \in \operatorname{cl}(\operatorname{conv}(\operatorname{supp}(Q)))$, где $\operatorname{cl}(A)$ обозначает замыкание A. Действительно, для случая компактного носителя в $\mathbb{R}^n$ см., например, [6], Теорема 3.6; в общем случае носитель $\operatorname{supp}(Q)$ представим в виде $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} K_i$ компактов K_i, таких что $K_i \subseteq K_{i+1}$, $i = 1, 2, \ldots$, $Q(K_1) > 0$; полагая $dQ_{K_i} = \frac{I_{K_i}}{Q(K_i)} dQ$, имеем $\int y\, Q_{K_i}(dy) \in \operatorname{conv}(K_i) \subseteq \operatorname{conv}(\bigcup\limits_{j=1}^{n} K_j) = \operatorname{conv}(\operatorname{supp}(Q))$ и, переходя к пределу при $i \to \infty$, имеем $\int y\, Q_{K_i}(dy) = \int y \frac{I_{K_i}}{Q(K_i)} Q(dy) \to \int y\, Q(dy)$, поскольку $\int \|y\| Q(dy) < \infty$ (по теореме Лебега о мажорируемой сходимости), так что среднее $\int y Q(dy)$ принадлежит замыканию выпуклой оболочки носителя меры Q.

Пусть V – аффинная оболочка носителя $\operatorname{supp}(Q)$ распределения Q, тогда V – наименьшее аффинное подпространство (в частности, минимальной размерности), такое что $Q(V) = 1$. Поскольку аффинная оболочка замкнута в $\mathbb{R}^d$, она содержит замыкание выпуклой оболочки носителя Q, так что $y \in V$. Допустим, что $y \notin \operatorname{conv}(B)$; тогда по теореме о разделяющей гиперплоскости (см. Теорему 11.2 из [26]) существует невырожденный[29] аффинный функционал $L : V \mapsto \mathbb{R}$, такой что[30]

$$L(x) \geq 0, \text{ для любого } x \in \operatorname{conv}(B), \tag{4.1}$$

---

[27] Конечны одномерные интегралы по каждой координате вектора y, что равносильно неравенству $\int \|y\| Q(dy) < \infty$.

[28] Лемма 4.3 и ее доказательство были сообщены мне Джорджем Лоузером (George Lowther).

[29] Отличный от тождественной константы.

[30] По Теореме 11.2 [26] для аффинного многообразия $M = \{y\}$ можно найти

$$L(y) = 0. \tag{4.2}$$

Заметим, что это разделение является собственным, но, вообще говоря, не сильным (строгим) в терминологии [26]. Поскольку в силу (4.2)

$$\int_V L(x)Q(dx) = L\bigg(\int_V xQ(dx)\bigg) = L(y) = 0$$

и $L(x)$ неотрицательно почти всюду в силу (4.1), то $L(x) = 0$ почти всюду относительно Q, т.е. $Q(V') = 0$ для $V' = \{x : L(x) = 0\}$. Аффинное многообразие $V' \subseteq V$ имеет размерность $dim(V') = dim(V) - 1$, что противоречит минимальности V по его определению. Следовательно, $y \in \mathrm{conv}(B)$. □

Замечание 4.1. Лемма 4.3 существенно опирается на конечномерность пространства $\mathbb{R}^n$. Утверждение Леммы перестает быть справедливым в бесконечномерном случае.

В качестве иллюстрации этого факта рассмотрим гильбертово пространство ℓ^2 квадратично суммируемых последовательностей с ортонормированным базисом $\{\mathbf{e}_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ и дискретной вероятностной мерой Q, сосредоточенной в точках $a_k\mathbf{e}_k$, где $a_k \neq 0$, $\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k^2 < \infty$ и $p_k = Q(\{a_k\mathbf{e}_k\}) > 0$, $k \in \mathbb{N}$. Вычисляя среднее значение $y = \int x\, Q(dx)$ при помощи интеграла Гельфанда–Петтиса, получаем $y = \sum\limits_{k=1}^{\infty} p_k a_k \mathbf{e}_k \in \ell^2$. Очевидно, $y \notin \mathrm{conv}(\mathrm{supp}(Q))$, поскольку выпуклая оболочка содержит только конечные выпуклые комбинации векторов $a_k\mathbf{e}_k$.

Чтобы применить изложенные выше результаты к проблеме моментов (3.1) и (3.2), положим $Y = \mathbb{R}^n$, $f = g$ в Лемме 4.1 и пусть $X' \subseteq X$ выбрано таким, что $X' \in \mathcal{A}$, $\pi(X') = 1$ и $g(X') \in \mathcal{B}^n$. Обозначим Q_g меру, индуцированную отображением $g : X \mapsto \mathbb{R}^n$, т.е.

содержащую его гиперплоскость H (в пространстве V), такую что выпуклое относительно открытое множество $C = \mathrm{ri}(\mathrm{conv}(B))$ содержится в одном из открытых полупространств, порожденных H, т.е. найдется (невырожденный) аффинный функционал L, такой что $L(x) = 0$ для $x \in H$ и $L(x) > 0$ для $x \in C$. В конечномерном пространстве аффинные функционалы непрерывны, так что $L(x) \geq 0$ для $x \in \mathrm{cl}(\mathrm{ri}(\mathrm{conv}(B))) = \mathrm{cl}(\mathrm{conv}(B)) \supseteq \mathrm{conv}(B)$. При этом $\mathrm{conv}(B) \supseteq B \neq \emptyset$, так как $Q(B) = 1$.

$Q_g(A) = \pi(g^{-1}(A))$ для $A \in \mathcal{B}^n$. С использованием замены переменных в интеграле Лебега имеем:

$$\int\limits_X g(x)\pi(dx) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} yQ_g(dy).$$

Чтобы применить Лемму 4.3, выберем $d = n$, $B = g(X') \in \mathcal{B}^n$; тогда $g^{-1}(g(X')) \supseteq X'$, поэтому $Q_g(B) = 1$. Таким образом,

$$\int g(x)\pi(dx) \in \mathrm{conv}(g(X')), \tag{4.3}$$

причем $X' \subseteq X$, $X' \in \mathcal{A}$, $g(X') \in \mathcal{B}^n$, а по Следствию 1 получаем $\mathrm{conv}(g(X')) \in \mathcal{B}^n$. Тем самым, в частности, установлен следующий результат.

Предложение 4.1. *Если X – польское пространство с σ–алгеброй $\mathcal{A}$ и функции g_j $j = 1, \ldots, n$ измеримы (относительно борелевской σ–алгебры $\mathcal{B}$ на $\mathbb{R}$), то множества $g(X)$ и $\mathrm{conv}(g(X))$ универсально измеримы.*

Замечание 4.2. Это предложение можно также получить иным, «менее конструктивным» способом, используя результаты из книги [1].

По Определению 7.7 этой книги борелевским пространством называется гомоморфный образ борелевского множества польского пространства (в частности, польское пространство в этой терминологии является борелевским пространством). По Предложению 7.40 этой книги для борелевски измеримого отображения одного борелевского пространства в другое образ аналитического множества[31]является аналитическим. По Следствию 7.42.1 из этой книги любое аналитическое подмножество борелевского пространства универсально измеримо. Тем самым, образ борелевски измеримой функции в нашем случае (для проблемы моментов), т.е. для $g : X \mapsto \mathbb{R}^n$, является универсально измеримым. Для произвольной меры $\pi \in \mathcal{P}(X)$ найдутся $B, B' \in \mathcal{B}^n$, такие что $B \subseteq g(X) \subseteq B'$ и $\pi(B' \setminus B) = 0$, при этом $g^{-1}(B) \subseteq g^{-1}(g(X)) = X = g^{-1}(B')$, поэтому $Q_g(B) = 1$. Любое борелевское множество в $\mathbb{R}^n$ можно приблизить снизу (по мере)

---

[31] Определение аналитического множества см., например, в параграфе 7.6.1 [1].

компактами, поэтому найдутся компакты K_i, такие что $K_i \subseteq K_{i+1}$ $i = 1, 2, \ldots$, $\bigcup_{i=1}^{\infty} K_i \subseteq B$ и $Q_g(B \setminus \bigcup_{i=1}^{n} K_i) = 0$. Далее можно применить рассуждения из Следствия 1, чтобы убедиться в универсальной измеримости $\operatorname{conv}(g(X))$.

5. Применение результатов общей проблемы моментов

Возвращаясь к задаче (2.7) при оптимизации на первом этапе, имеем проблему моментов (2.8), где

$$X = \operatorname{conv}(K_t(\cdot)) \bigcap \operatorname{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset,$$

$$f_j(y) = y_j \; j = 1, \ldots, n,$$

$$f_0(y) = w_t(\cdot, y),$$
$$I(z) = u_{t,\cdot}(z).$$

При этом $X = f(X) = \operatorname{conv}(X)$ – выпуклое ограниченное множество,[32] функция f непрерывна, а функция f_0 ограничена в силу условия (B).

Линейная независимость функций $f_1, \ldots, f_n, f_{n+1}$ равносильна тому, что X не содержится в аффинном многообразии, меньшей чем n размерности; это отвечает случаю общего положения.

Огибающая f_0^* функции f_0 относительно системы функций $f_1(y) = y_1, \ldots, f_n(y) = y_n$, $f_{n+1} \equiv 1$ есть не что иное, как минимальная полунепрерывная сверху вогнутая мажоранта функции f_0. В частности, f_0^* измерима относительно борелевской σ-алгебры. В силу вогнутости f_0^*, функция $Q \mapsto \int f_0^*(y) Q(dy)$ достигает на $E(z)$ максимума для $Q = \delta_z$ (т.е. для меры, сосредоточенной в точке z), так как для $Q \in E(z)$ в силу неравенства Йенсена:

$$\int f_0^* Q(dy) \leq f_0^* \biggl(\int y \, Q(dy) \biggr) = f_0^*(z),$$

т.е. $I(z) = f_0^*(z)$.

[32] Барьерный конус не обязан быть замкнутым; в работе [30] приведена характеризация выпуклого конуса, который является барьерным конусом для некоторого непустого выпуклого множества: этот конус должен быть множеством типа F_σ (представим в виде счетного объединения замкнутых множеств). Необходимость очевидна, т.к. опорная функция полунепрерывна снизу.

При этом максимум функции $Q \mapsto \int f_0^* \, dQ$ может, разумеется, достигаться не для единственной меры Q. Пусть вектор h – суперградиент[33] вогнутой функции f_0^* в точке $z \in \mathrm{int}(X)$; обозначим

$$B_{z,h} = \{y : \; f_0^*(y) = f_0^*(z) + h(y - z)\}.$$

Любая мера Q^* с носителем $\mathrm{supp}(Q^*) \subseteq B_{z,h}$ будет максимизировать функцию $Q \mapsto \int f_0^* \, dQ$ на $E(z)$, поскольку $\int f_0^* \, dQ^* = f_0^*(z)$. Нетрудно видеть, что множество $B_{z,h}$ при этом выпукло. Кроме того, поскольку вогнутая функция непрерывна при $z \in \mathrm{int}(X)$ (см. Теорему 10.1 [26]), то $B_{z,h}$ также является замкнутым для $z \in \mathrm{int}(X)$. Таким образом, если найдется суперградиент h, такой что $B_{z,h}$ не сводится к одноточечному множеству, т.е. $B_{z,h} \neq \{z\}$, то мера, максимизирующая функции $Q \mapsto \int f_0^* \, dQ$, неединственна; кстати, суперградиент h с таким свойством также может быть неединственным.[34]

Допустим теперь, что функция $Q \mapsto \int f_0 dQ$ достигает максимального значения на $E(z)$ для некоторой меры $Q^* \in E(z)$. Тогда

$$I(z) = \int f_0 \, dQ^* \leq \int f_0^* \, dQ^* \leq f_0\biggl(\int y \, dQ^* \biggr) = f_0^*(z) = I(z).$$

Поскольку $f_0 \leq f_0^*$, то получаем $f_0 = f_0^*$ почти всюду относительно Q^*. В случае, если f_0 полунепрерывна сверху (достаточное условие для этого сформулированы в [11], Теорема 4), по Теореме 3.1 пункт 3 а) такая мера Q^* найдется, причем можно выбрать $Q^* \in E^n(z)$, т.е. найдется $k \leq n+1$, такое что носитель $\mathrm{supp}(Q^*)$ состоит из k точек $x^1, \ldots, x^k \in X$. Следовательно, $f_0(x^i) = f_0^*(x^i)$, $i = 1, \ldots, k$, причем для некоторого $q \in S_{k-1}$, такого что $q_i > 0$ для $i = 1, \ldots, k$, имеет место $\sum_{i=1}^{k} q_i \, x^i = z$. Если $k = n+1$, то $q \in S_n$, такое что $q_i > 0$ для $i = 1, \ldots, n+1$, определяется однозначно в случае общего положения из системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{n+1} q_i \, f_j(x^i) = z_i, \; j = 1, \ldots, n, \\ \sum\limits_{i=1}^{n+1} q_i \, f_{n+1}(x^i) = 1, \end{cases} \tag{5.1}$$

---

[33] Вектор h является суперградиентом вогнутой функции f в точке z, если для любого y имеет место неравенство $f(y) \leq f(z) + h(y - z)$.

[34] В случае, если размерность $B_{z,h}$ меньше n.

где $f_1(x) = x_1, \ldots, f_n(x) = x_n$, $f_{n+1} \equiv 1$, поскольку в случае общего положения эти функции линейно независимы.

Следующий простой пример имеет, однако, важную экономическую интерпретацию.

Пример 5.1. Рассмотрим одношаговую мультипликативную модель, схожую с рассмотренной в примере 2 из [9], однако на сей раз предположим, что имеются торговые ограничения – запрет коротких позиций, т.е. $D_1(1) = [0, \infty)$. Положим $X_0 = 1$, $K_1(1) = [a, b]$, причем $-1 < a < 0 < b$. В качестве опциона выберем бинарный опцион "put", в начальный момент времени "out of the money" с ценой исполнения $1+s$, где $s \in (a, 0)$, с полунепрерывной сверху функцией выплат, т.е. $g_1(x) = I_{(-\infty,1+s)}(x)$; в этом случае $v_1^*(1, 1+y) = g_1(1+y) = I_{(-\infty,s)}(y)$. Решая задачу (2.8) на этапе 1 для[35] $z \in (a, b) \bigcap(-\infty, 0] = (a, 0]$, с учетом вышеизложенного, точная верхня грань в (2.8) достигается для распределений, сосредоточенных не более чем в двух точках, причем вогнутая оболочка для функции $y \mapsto g_1(1+y)$ равна 1 при $y \leq s$, а при $y \in [s, b]$ ее график – отрезок, соединяющий точки на плоскости $(s, 1)$ и $(b, 0)$, а при $y \geq b$ эта функция равна нулю. Оптимальная смешанная стратегия рынка, распределение Q^*, сосредоточено в двух точках s и b, когда $z \in (s, 0]$, т.е. $Q^* = q_1\delta_s + q_2\delta_b$, q_1, $q_2 > 0$, $q_1 + q_2 = 1$. Условие $\int yQ^*(dy) = sq_1 + bq_2 = z$ влечет

$$q_1 = q_1(z) = \frac{b-z}{b-s} \in (0, 1).$$

Если же $z \in (a, s]$, то наиболее неблагоприятная смешанная стратегия рынка сосредоточена в одной точке z, т.е. $Q^* = \delta_z$. С учетом (2.8) и (2.10), для $z \in (a, 0]$

$$u_1(z) = I_{(a,s]}(z) + q_1(z)I_{(s,0]}(z) = I_{(a,s]}(z) + \frac{b-z}{b-s}I_{(s,0]}(z).$$

С учетом (2.9) и (2.9′)[36]

$$v_0^* = \rho_1 = \sup_{z\in(a,0]} u_1(z) = 1;$$

[35] Здесь $\mathrm{bar}(D_1(1)) = (-\infty, 0]$, см. пример 2.1.

[36] Напомним, что для одношаговой задачи мы формально полагаем $g_0 \equiv -\infty$.

при этом точная верхняя грань в задаче (2.7) достигается на одноточечных распределениях $Q^* = \delta_z$ для $z \in (a, s]$. Поскольку по условию $s < 0$, все эти меры «супермартингальные», но не «мартингальные». Таким образом, вопреки распространенному на практике мнению, что для ценообразования опционов следует всегда использовать «риск-нейтральные» вероятности, в данном примере с запретом коротких позиций, этому (ничем не обоснованному) предположению о риск-нейтральности соответствовало бы значение

$$\sup_{Q\in\mathcal{P}_t(\cdot),\, \int yQ(dy)=0} \int v_1^*(1, 1+y)Q(dy) = \frac{b}{b-s} < 1.$$

□

Допустим, что имеет место равновесие (2.4), и что в (2.9) точная верхняя грань достигается для некоторого $z_t^*(\cdot) \in \mathrm{conv}(K_t(\cdot)) \bigcap \mathrm{bar}(D_t(\cdot))$. Кроме того, предположим, что при этом точная верхняя грань в (2.8) для $z = z^*$ достигается для некоторого распределения $Q^*_{t,\cdot} \in E^n_t(z^*) = \{Q \in \mathcal{P}^n(K_t(\cdot)) : \int zQ(dz) = z^*\}$ с носителем $\mathrm{supp}(Q^*_{t,\cdot}) = \{y^1_t(\cdot), \ldots, y^{m_t(\cdot)}_t(\cdot)\} \subseteq K_t(\cdot)$, где $m_t(\cdot) \leq n+1$. Тогда решение задачи (BA) сводится к решению более простой задачи с новыми ограничениями на возможные приращения цен, представимыми в виде компактов $K'_t(\cdot) \subseteq K_t(\cdot)$, содержащих конечное число точек: $K'_t(\cdot) = \{y^1_t(\cdot), \ldots, y^{m_t(\cdot)}_t\}$. Таким образом, для определения хеджирующей стратегии h_t на шаге $t = 1, \ldots, N$ достаточно хеджировать обусловленное обязательство против $m_t(\cdot)$ наиболее неблагоприятных сценариев движения рынка на этом шаге.

С этой целью, в принципе, можно решать задачу минимизации, включая нахождения минимизатора, вида

$$\rho_{t-1}(\cdot) = \inf_{h\in D_t(\cdot)} \varphi_{t,\cdot}(h), \tag{5.2}$$

где $\varphi_{t,\cdot}(h) = \bigvee_{y\in K'_t(\cdot)} [w_t(\cdot, y) - hy]$. Отметим, что функция $h \mapsto \varphi_{t,\cdot}(h)$ является выпуклой полиэдральной. В силу сделанного предложения о том, что $\mathrm{conv}(K_t(\cdot)) \bigcap \mathrm{bar}(D_t(\cdot)) \neq \emptyset$, следует в соответствии с Предложением 5 из статьи [13], что $\pi_t(\cdot) < \infty$, а из формулы (21) из [13] имеем $\rho_{t-1}(\cdot) \geq -\pi_t(\cdot)$, т.е. точная нижняя грань в (5.2) – конечное число. При этом можно воспользоваться следующим фактом: для того, чтобы $h^*(\cdot)$ доставлял минимум в (5.2), необходимо и достаточно, чтобы нашелся субградиент $y_t^*(\cdot)$ функции $\varphi_{t,\cdot}$ в точке $h_t^*(\cdot)$, являющийся внутренней нормалью[37] к множеству $D_t(\cdot)$, см. Теорему 27.4 из [26]. Отметим, что субдифференциал[38] полиэдральной выпуклой функции является полиэдральным выпуклым множеством (Теорема 23.10 из [26]), множество внешних нормалей к множеству D в точке h^* является замкнутым выпуклым конусом. Кроме того, можно использовать тот факт, что по Теореме 2.1 из главы IV [3] для того, чтобы h^* была точкой минимума функции $\varphi_{t,\cdot}(h)$ на $D_t(\cdot)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\inf_{h\in D_t(\cdot)} \bigvee_{j\in J_{t,\cdot}(h^*)} (h-h^*)y^j = 0,$$

где $J_{t,\cdot}(h^*) = \{j:\ v_t(\cdot, x_{t-1}+y) - h^*y^j = \varphi_{t,\cdot}(h^*)\}$.

6. Случай отсутствия торговых ограничений

Особо простой вид приобретает задача нахождения точной верхней грани в (2.7) в случае отсутствия торговых ограничений, т.е. $D_t(\cdot) \equiv \mathbb{R}^n$, при отсутствии арбитражных возможностей, т.е. когда выполнено условие NDAO. В этом случае, с учетом Теоремы 3.1 пункт 2), на этапе 1, решая задачу условной оптимизации (2.8), нужно найти

$$\sup_{Q\in\mathcal{P}_t^n(K_t(\cdot)),\ \int y\,Q(dy)=0} \int w_t(\cdot, y)\, Q(dy), \tag{6.1}$$

причем этап 2 в данном случае отпадает в силу $\mathrm{bar}(D_t(\cdot)) = \{0\}$. Условие NDAO, равносильное $0 \in \mathrm{ri}(\mathrm{conv}(K_t(\cdot)))$, означает, что вектор 0 находится в относительной внутренности $X = g(X) = \mathrm{conv}(K_t(\cdot))$. Таким образом, применима теорема Рихтера–Исии–Карлина (возможно, в линейном пространстве меньшей размерности, если размерность $K_t(\cdot)$ меньше n, проводя рассуждения, аналогичные использованным в доказательстве Теоремы 1 из [14]. Поэтому можно, не ограничивая общности, рассматривать случай общего положения.

Предположим, что точные верхние грани в (6.1) достигаются. При этом, ограничивая число точек носителя смешанной стратегии

---

[37] Внутренняя нормаль y^* к выпуклому множеству D в точке h^* есть вектор, удовлетворяющий $(h-h^*)y^* \ge 0$ для всех $h \in D$.

[38] Субдифференциал функции f в точке x есть множество всех субградиентов этой функции в точке x.

Q числом $n+1$, и учитывая, что для конечного множества траекторий детерминистский и вероятностный способ описания приводят к одной и той же (одношаговой) задаче, получаем модель полного рынка. Поэтому возможно использовать все относящиеся к полному рынку результаты стохастического подхода, в частности [22], см. также [16], Теорему B^* (расширенный вариант второй фундаментальной теоремы); условие отсутствия арбитражных возможности здесь равносильно существованию единственной эквивалентной[39] мартингальной меры. В нашей постановке, наиболее неблагоприятные смешанные стратегии меры $Q_t^*(\cdot)$ с конечным носителем $K_t'(\cdot)$, содержащим не более чем $n+1$ точку, задают соответствующие условные распределения приращений при заданной траектории цен из предыстории относительно текущего момента t, так что эти приращения образуют мартингал–разность; обозначая наиболее неблагоприятную смешанную стратегию на шаге t, т.е. $Q_t^*(\cdot)$, через[40] $Q_{t,\cdot}^*$, уравнения Беллмана (2.7) принимают следующий вид:

$$\begin{aligned} v_N^*(\cdot) &= g_N(\cdot), \\ v_{t-1}^*(\cdot) &= g_{t-1}(\cdot) \bigvee \int w_t(\cdot, y) Q_{t,\cdot}^*(dy), \ t = N, N-1, \ldots, 1. \end{aligned} \tag{6.2}$$

где w_t задается (T). Для случайного процесса X_t, $t = 0, \ldots, N$, у которого $X_0 = x_0$ фиксировано, а распределения условных приращений цен ΔX_t при известной предыстории $X_0 = x_0, \ldots, X_{t-1} = x_{t-1}$ равны $Q_{t,x_0,\ldots,x_{t-1}}^*$, уравнения (6.2) задают огибающую Снелла[41] процесса G_t, $t = 1, \ldots, N$, где $G_t = g_t(X_0, \ldots, X_t)$. Отметим, что огибающая Снелла связана с задачей оптимальной остановки[42], если стратегию владельца опциона описывать посредством выбора момента остановки – исполнения американского опциона, см. [16], гл. VI, раздел 2, § 2c; Теорема 3 этого параграфа дает способ нахождения соответствующей хеджирующей стратегии $H_t^* = h_t^*(\bar{X}_{t-1})$, а именно, из разложения Дуба для супермартингала $V_t^* = v_t^*(\bar{X}_t)$ относительно един-

[39] Эквивалентность мер, заданных на конечном множестве, сводится к совпадению их носителей.

[40] Для удобства обозначений при интегрировании по мере.

[41] Наименьший супермартингал, мажорирующий заданный случайный процесс.

[42] См. [18], гл. III, §1.

ственной мартингальной меры $\mathbb{P}_*$, с использованием представления мартингала в виде мартингального преобразования[43]:

$$H_t^* \Delta X_t = V_t^* - \mathbb{E}_*^{\mathcal{F}_{t-1}} V_t^*,\ t = 1, \ldots, N, \tag{6.3}$$

где $\mathbb{E}_*^{\mathcal{F}_t}$ – оператор математического ожидания[44] относительно σ-алгебры $\mathcal{F}_t$, порожденной случайными величинами $X_0, \ldots, X_t$, т.е.

$$\mathbb{E}_*^{\mathcal{F}_{t-1}} V_t^* = \int v_t^*(X_0, \ldots, X_{t+1}, X_{t+1} + y) Q^*_{t, X_0, \ldots, X_{t-1}}(dy).$$

Иными словами, стратегия $h_t^*(\bar{x}_{t-1})$ находится из системы линейных уравнений

$$h_t^*(\bar{x}_{t-1}) z = v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + z) - \int v_t^*(\bar{x}_{t-1}, x_{t-1} + y) Q^*_{t, \bar{x}_{t-1}}(dy),$$

когда z пробегает сценарии приращений цен[45] из $K_t'(\bar{x}_{t-1}) = \operatorname{supp}(Q^*_{t,\bar{x}_{t-1}})$; вектор $h_t^*(\cdot)$ выбирается из линейной оболочки носителя $K_t'(\cdot)$ размерности $m_t - 1$.

В случае, когда задача ценообразования и хеджирования ставится как суперрепликация относительно $\mathbb{P}_*$ европейского опциона (торговые ограничения отсутствуют, рынок без арбитражных возможностей), в силу полноты рынка для референтной меры $\mathbb{P}_*$ это равносильно репликации. Процесс V^* в этом случае – мартингал, так что (6.2) превращается в соотношение

$$V_N^* = g(\bar{X}_N),$$
$$V_{t-1}^* = \mathbb{E}_*^{\mathcal{F}_{t-1}} V_t^*,\ t = N, \ldots, 1,$$

где g – функция выплат по опциону в терминальный момент, а (6.3) в этом случае принимает вид

$$H_t^* \Delta X_t = \Delta V_t^*,\ t = 1, \ldots, N,$$

[43] Адаптированный процесс V_t, $t = 0, 1, \ldots$ является мартингальным преобразованием X при помощи H, если H – предсказуемый процесс, $\Delta V_t = H_t \Delta X_t$, а X – мартингал (в учебнике [17], том. 2, гл. VII, §1, определение 4) еще дополнительно требуется $V_0 = H_0 X_0$).

[44] В силу конечности носителей условных распределений равенства и неравенства, связанные с использованием условных ожиданий (которые обычно понимаются «почти всюду»), здесь выполняются «всюду».

[45] Достаточно $m_t - 1$ из m_t сценариев, так что они линейно зависимы.

т.е. аналогично предыдущему случаю, стратегия $h_t^*(\cdot)$ находится из системы линейных уравнений для сценариев приращений цен из носителя условного распределения, отвечающего наиболее неблагоприятной смешанной стратегии рынка, соответствующей единственной мартингальной мере $\mathbb{P}_*$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бертсекас Д., Шрив С. *Стохастическое оптимальное управление: случай дискретного времени.* М.: «Наука», 1985.

2. Гермейер Ю.Б. *Введение в теорию исследования операций.* М.: «Наука», 1971.

3. Демьянов В.Ф., Малоземов В.Н. *Введение в минимакс.* М.: «Наука», 1972.

4. Канторович Л.В. *Математические методы организации и планирования производства.* Л.: Изд-во ЛГУ, 1939.

5. Карлин С., Стадден В. *Чебышевские системы и их применение в анализе и статистике.* М.: «Наука», 1976.

6. Лейхтвейс К. *Выпуклые множества.* М.: «Наука», 1985.

7. Марков А.А. *О некоторых приближениях алгебраических непрерывных дробей: докторская диссертация.* СПб., 1884.

8. Математическая энциклопедия. Т. 5: Случайная величина — Ячейка / Глав. ред. Виноградов И.М. М.: Советская Энциклопедия. 1985.

9. Смирнов С.Н. *Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: модель рынка, торговые ограничения, безарбитражность и уравнения Беллмана-Айзекса* // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2018. Т. 10, вып. 4. С. 59–99.

10. Смирнов С.Н. *Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: свойства «безарбитражности» рынка* // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2019. Т. 11, вып. 2. С. 68–95.

11. Смирнов С.Н. *Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: свойства полунепрерывности и непрерывности решений уравнений Беллмана-Айзекса* // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2019. Т. 11, вып. 4. С. 87–115.

12. Smirnov S.N. *A Guarantied Deterministic Approach to Superhedging: Lipschitz Properties of Solutions of the Bellman-Isaacs Equations* // In “Frontiers of Dynamics Games. Game Theory and Management, St. Petersburg”, Birkhauser, 2019, P. 267–288.

13. Смирнов С.Н. *Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: смешанные стратегии и игровое равновесие* // Математическая Теория Игр и ее Приложения. 2020. Т. 12, вып. 1. С. 60–90.

14. Смирнов С.Н. *Гарантированный детерминистский подход к суперхеджированию: равновесие при отсутствии торговых ограничений* // Чебышевский сборник. 2020.

15. Смирнов С.Н. *Общая теорема теории антагонистических игр о конечном носителе смешанной стратегии* // Доклады Академии Наук. 2018. Том 480, № 1. С. 25–28.

16. Ширяев А.Н. *Основы стохастической финансовой математики. Том 2. Теория.* М.: ФАЗИС, 1998.

17. Ширяев А.Н. *Вероятность – 2.* М.: МЦНМО, 2004.

18. Ширяев А.Н. *Стохастические задачи о разладке.* М.: МЦНМО, 2016.

19. Bernhard P., Engwerda J.C. et al. *The Interval Market Model in Mathematical Finance: Game-Theoretic Methods.* NY: Springer, 2013.

20. Denkowski Z., Migórski S., Papageorgiou N.S. *An Introduction to Nonlinear Analysis: Theory.* NY: Springer Science & Business Media, 2003.

21. Isii K. *The extrema of probability determined by generalized moments (I) bounded random variables* // Annals of the Institute of Statistical Mathematics. 1960. Vol. 12, no. 2. P. 119–134.

22. Jacod J, Shiryaev A.N. *Local martingales and the fundamental asset pricing theorems in the discrete-time case* // Finance And Stochastics. 1998. Vol. 2, no. 3. P. 259-–273.

23. Krein M., Milman D. *On extreme points of regular convex sets* // Studia Mathematica. 1940. Vol. 9. P. 133–138.

24. Mulholland H.P., Rogers C.A. *Representation theorems for distribution functions* // Proceedings of the London Mathematical Society. 1958. Vol. 3, no. 2. P. 177–223.

25. Richter H. *Parameterfreie abschätzung und realisierung von erwartungswerten* // Blätter der DGVFM. 1957. Vol. 3, no. 2. P. 147–162.

26. Rockafellar R.T. *Convex Analysis.* Princeton: Princeton University Press, 1970.

27. Rogosinski W.W. *Moments of non-negative mass* // Proceedings of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences. 1958. Vol. 245, no. 1240. P. 1–27.

28. Ryll-Nardzewski C. *On quasi-compact measures* // Fundamenta Mathematicae. 1953. Vol. 40, no. 1. P. 125–130.

29. Smirnov S.N. *Thoughts on Financial Risk Modeling: the Role of Interpretation* // Intelligent Risk. 2012. Vol. 2, no. 2. P. 12–15.

30. Sung C.H., Tam B.S. *On the Cone of a Finite Dimensional Compact Convex Set at a Point* // Linear Algebra and Its Applications. 1987. Vol. 90. P. 47–55.

A GUARANTEED DETERMINISTIC APPROACH TO SUPERHEDGING: MOST UNFAVORABLE SCENARIOS OF MARKET BEHAVIOUR AND MOMENT PROBLEM

Sergey N. Smirnov, Department of System Analysis, Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, Lomonosov Moscow State University, Cand.Sc., associate professor
(s.n.smirnov@gmail.com).

Abstract: A guaranteed deterministic problem setting of super-replication with discrete time is considered: the aim of hedging of a contingent claim is to ensure the coverage of possible payout under the option contract for all admissible scenarios. These scenarios are given by means of a priori given compacts, that depend on the prehistory of prices: the increments of the price at each moment of time must lie in the corresponding compacts. The absence of transaction costs is assumed. The game-theoretical interpretation implies that the corresponding Bellman-Isaac equations hold, both for pure and mixed strategies. In the present paper, we propose a two-step method of solving the Bellman equation arising in the case of (game) equilibrium. In particular, the most unfavorable strategies of the "market" can be found in the class of the distributions concentrated at most in $n+1$ point, where n is the number of risky assets.

Keywords: guaranteed estimates, deterministic price dynamics, super-replication, option, arbitrage, absence of arbitrage opportunities, Bellman-Isaacs equations, mixed strategies, game equilibrium, no trading constraints, risk-neutral measures.