Математическая Теория Игр и её Приложения, т.12, в.1, с. 33–59

УДК 519.83
ББК 22.18

НОРМАТИВНАЯ ТЕОРИЯ ЗАГОВОРОВ

Максим А. Савченко
Факультет вычислительной математики и кибернетики
МГУ им. М.В. Ломоносова
e-mail: pdunan@gmail.com

Автором предлагается новая, основанная на коррелированном расширении игр в нормальной форме, модель, описывающая поведение игроков в ситуациях информационной асимметрии, возникающей как следствие различия в возможностях тайного согласования стратегий.

Ключевые слова: матричные игры n игроков, коррелированные стратегии, необязывающие тайные соглашения.

Поступила в редакцию: 08.09.19 *После доработки*: 16.12.19 *Принята к публикации*: 23.12.19

1. Введение

Предметом исследования в данной работе являются некооперативные игры многих игроков, допускающие тайную координацию действий для достижения необязывающих соглашений. Наиболее распространённым подходом для моделирования таких игр является механизм коррелированных стратегий [5] Роберта Ауманна. Коррелированные стратегии определяются для игр в нормальной форме как отображения на множество чистых стратегий игроков множества допустимых состояний наблюдаемого ими общего сигнала, представляющего собой исход некоторого случайного испытания. По построению

Автор выражает благодарность и глубокую признательность доценту кафедры ИО, помощнику декана по ФПК Морозову Владимиру Викторовичу, без советов и ценных замечаний которого эта статья не обрела бы заслуживающего публикации вида.

коррелированные стратегии являются обобщением классических смешанных стратегий. Однако, в своей работе Ауманн показал, что множество равновесий в коррелированных стратегиях может включать решения, не принадлежащие выпуклой оболочке множества равновесий в смешанных стратегиях. Таким образом, использование корреляции существенно расширяет множество решений игр в нормальной форме. Проиллюстрируем это игрой „трёхсторонний чёт-нечет“:

Таблица 1.

$0,0,0$	$1,-2,1$
$-2,1,1$	$1,1,-2$

$1,1,-2$	$-2,1,1$
$1,-2,1$	$0,0,0$

В этой игре 1-й игрок выбирает строку, 2-й — столбец, а 3-й — матрицу. В чистых стратегиях равновесия по Нэшу достигаются в верхнем левом углу первой матрицы и нижнем правом углу второй матрицы, давая выплаты $(0,0,0)$ в обоих случаях. В смешанных стратегиях появляется ещё одно вырожденное решение, в котором каждый игрок делает случайный выбор из двух своих стратегий с равными вероятностями (давая те же ожидаемые выплаты). Теперь представим, что в состоянии природы существует сигнал с двумя равновероятными исходами (бросок симметричной монеты, скажем), наблюдаемый 1-м и 2-м игроками, но неизвестный 3-му игроку. В этом случае 1-й и 2-й игроки могут использовать коррелированную стратегию, использующую этот сигнал — с равными вероятностями синхронно выбирать верхний левый или правый нижний углы. При этом стратегия 3-го игрока, не знающего результата броска, не имеет значения, поскольку, к какому бы событию он ни привязал её, в силу независимости с сигналом, используемым остальными игроками, ожидаемые выплаты будут равны $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1)$.

Такой результат можно рассматривать как сговор, в который вступили первый и второй игроки против третьего игрока. Вследствие негласного выбора общей стратегии оба заговорщика могут улучшить свой результат за счёт проигрыша третьего, не осведомлённого о результате их договорённости. Немаловажно то, что им при этом не понадобилось заключать никакого обязывающего соглашения, так как выигрыш достигается благодаря обоюдовыгодному тайному обмену информацией.

В расширении Ауманна игр в нормальной форме игроки наблюдают некоторый сигнал (состояние природы), значение которого непосредственно на выплаты не влияет, позволяя, однако, игрокам синхронизировать с его помощью свои действия. При этом разные игроки обладают разной степенью информированности о состоянии природы — некоторые значения этого сигнала могут быть различимы для одних игроков, но идентичны с точки зрения других. Это позволяет группам игроков не просто синхронизировать свои действия, но делать это втайне от остальных — что вполне отвечает задачам данного исследования.

Коррелированные стратегии использовались многими исследователями в самых разных контекстах. К примеру, в терминах Ауманна можно формулировать поручения из теории принципал-агентов [10]. Кроме того, эта модель совместима с некоторыми менее тривиальными концепциями решений, такими как коалиционно-устойчивые равновесия [6]. Наконец, механизм сопоставления потерь отвечает на вопрос о существования адаптивных процедур, приводящих игроков к коррелированным равновесиям [9]. Здесь же вниманию читателя предлагается анализ внутреннего устройства коррелированного расширения игр в нормальной форме. В данной работе будет выделено специальное сужение модели Ауманна, допускающее разбиение множества наборов параметров на непересекающиеся классы с конечным описанием. Помимо этого будет показан способ конструирования стандартных представителей классов по их описанию. И наконец, будет предложена концепция равновесия, в рамках которой порождаются множества решений, зависящие только от описания соответствующего класса.

2. Пространства корреляции

Ауманн вводил понятие коррелированных стратегий с учётом того, что вероятность одного и того же события может оцениваться игроками по-разному. В данной работе нас не будут интересовать модели с субъективными вероятностями, что делает искомый формализм проще. Кроме того, ограничимся играми с конечными множествами чистых стратегий. Рассмотрим игру в нормальной форме $\Gamma = \langle A, S^a, u^a(s), a \in A\rangle$. Конечное множество игроков здесь и далее везде обозначается как $A = \{1, \dots, m\}$, а конечное множество наборов чистых стратегий — $S = S^1 \times \ldots \times S^m$. Помимо множества стратегий S^a каждый игрок определяется ещё и платёжной функцией $u^a : S \to \mathbb{R}$.

Также рассмотрим вероятностное пространство [2] $\langle \Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P} \rangle$, в котором реализуется наблюдаемое игроками состояние природы. Здесь Ω — множество таких состояний, $\mathfrak{B}$ — σ-алгебра подмножеств Ω, а $\mathbb{P} : \mathfrak{B} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ — вероятностная мера. Каждому игроку $a \in A$ поставим в соответствие *собственное подпространство* $\langle \Omega, \mathfrak{I}^a, \mathbb{P} \rangle$ такое, что $\mathfrak{I}^a \subseteq \mathfrak{B}$. При этом набор σ-алгебр $\mathfrak{I} = (\mathfrak{I}^a, a \in A)$ отражает информированность игроков о состоянии природы. В описываемой ситуации состояние природы не влияет на функции выигрышей непосредственно, выступая исключительно как способ синхронизации действий игроков. Это значит, что σ-алгебра $\mathfrak{B}$ сама по себе не является существенным параметром модели, и измеримость по ней для $\mathbb{P}$ можно заменить измеримостью по $\mathfrak{I}^a, \forall a \in A$.

Таким образом, получается $\Phi = \langle A, \Omega, \mathfrak{I}^a, \mathbb{P}, a \in A \rangle$ — набор параметров, характеризующих некоторое *пространство корреляции* для произвольной игры с множеством игроков A. Отметим, что в играх с одним множеством игроков, но различными множествами чистых стратегий и функциями выигрыша можно применять одно и то же пространство корреляции. Полностью же *коррелированное расширение игры* определяет пара $\Gamma|\Phi$. Опишем полученную новую игру в терминах нормальной формы:

$$\Gamma|\Phi = \langle A, \mathbf{S}^a, u^a(\mathbf{s}), a \in A \rangle.$$

Здесь множество $\mathbf{S}^a$ доступных игроку a коррелированных стратегий состоит из всех $\mathfrak{I}^a$-измеримых функций $\mathbf{s}^a : \Omega \to S^a$, отображающих множество возможных состояний природы на множество доступных ему чистых стратегий. Соответственно, функция выигрыша вычисляется по формуле математического ожидания случайной величины

$$u^a(\mathbf{s}) = \sum_{s \in S} \mathbb{P}(\mathbf{s}^{-1}(s)) u^a(s), \ \mathbf{s}^{-1}(s) = \bigcap_{a \in A} (\mathbf{s}^a)^{-1}(s^a),$$

где $\mathbb{P}(\mathbf{s}^{-1}(s))$ выступают в роли коэффициентов распределения на матрице игры.

3. Изоморфизм пространств корреляции

Следует отметить, что модель пространств корреляции в некотором смысле существенно избыточна, поскольку как таковые события из состояния природы значения не имеют и используются лишь в качестве сигналов для синхронизации стратегий. То есть, важны не они сами по себе, а структура информированности о них игроков. Это значит, что формально различные пространства корреляции могут быть полностью взаимозаменимы с теоретико-игровой точки зрения, причём это касается как тривиальных замен множества состояний природы на другое множество той же мощности с соответствующей биекцией остальных параметров пространства, так и более сложных случаев. Например, если в контексте некоторой игры группа игроков наблюдает общий сигнал в виде колеса вещественной рулетки, будет ли иметь значение наблюдение ими ещё и броска монетки? Здравый смысл подсказывает что любую общую стратегию с использованием рулетки и монетки можно легко превратить в эквивалентную для одной только рулетки, для чего достаточно поделить колесо пополам и отобразить отдельные варианты для орла и решки на полученные два сектора. Опишем этот феномен в виде изоморфизма:

Определение 3.1. *Разбиением произвольного пространства корреляции $\Phi = \langle A, \Omega, \mathfrak{I}^a, \mathbb{P}, a \in A \rangle$ в произвольное конечное множество исходов (кодомен) $X = X^1 \times ... \times X^m$ называется отображение $f : \Omega \to X$, состоящее из набора функций $(f^1, ..., f^m)$, где каждая $f^a : \Omega \to X^a$ измерима в $\mathfrak{I}^a$. Далее «разбиение f пространства корреляции Φ» будем сокращённо обозначать $f \models \Phi$.*

В контексте коррелированного расширения множествам исходов X^a соответствуют множества чистых стратегий S^a, а элементам разбиения f^a — коррелированные стратегии $\mathbf{s}^a$. Далее также будут использоваться отображения $f^{-1} : X \to 2^\Omega$, обратные к разбиениям пространств корреляции:

$$f^{-1}(x) = \bigcap_{a \in A} (f^a)^{-1}(x^a).$$

Определение 3.2. *Пространство Φ_1 с мерой $\mathbb{P}_1$ называется отобразимым на Φ_2 с мерой $\mathbb{P}_2$ (далее $\Phi_1 \precsim \Phi_2$), если их множества* *игроков совпадают и для любого разбиения* $f_1 \models \Phi_1$ *существует разбиение* $f_2 \models \Phi_2$ *с тем же кодоменом такое, что* $\mathbb{P}_1 \circ f_1^{-1} = \mathbb{P}_2 \circ f_2^{-1}$*. Взаимно отобразимые друг на друга пространства корреляции называются изоморфными (далее* $\Phi_1 \sim \Phi_2$*).*

Это определение легко проиллюстрировать упомянутым выше примером — для любого разбиения $f_1 : [0,1) \times \{0,1\} \to X$ пространства, состоящего из вещественной рулетки и симметричной монетки, можно построить соответствующий образ $f_2 : [0,1) \to X$ в пространстве из одной только рулетки:

$$f_2(\alpha) = \begin{cases} f_1(2\alpha, 0), & 0 \le \alpha < \frac{1}{2} \\ f_1(2\alpha - 1, 1), & \frac{1}{2} \le \alpha < 1 \end{cases}.$$

Рефлексивность, симметричность и транзитивность вводимого при помощи данного определения изоморфизма очевидны, а значит это действительно отношение эквивалентности на множестве пространств корреляции. При этом, хотя определение изоморфизма дано в отрыве от коррелированного расширения игр, можно сформулировать следующую теорему (доказательство см. в приложении):

Определение 3.3. *Для игры* $\Gamma = \langle A, S^a, u^a(s), a \in A \rangle$ *множеством достижимых выплат по отклонениям группы игроков* A_* *от профиля стратегий* s *будем называть*

$$U_\Gamma^{A_*}(s) = \{\bar{u} \mid \exists s_* \in S : u(s_*) = \bar{u}, \forall a \in A \setminus A_*, s^a = s_*^a\}.$$

Теорема 3.1 (Об изоморфных пространствах)**.** *Пусть* $\Phi_1 \sim \Phi_2$*. Тогда для любой игры в нормальной форме* Γ *с конечными множествами стратегий игроков её коррелированные расширения* $\Gamma|\Phi_1$ *и* $\Gamma|\Phi_2$ *обладают следующим свойством. Пусть* $\mathbf{s}_1$ *— некоторый профиль стратегий игры* $\Gamma|\Phi_1$*. Тогда существует* $\mathbf{s}_2$ *— профиль стратегий игры* $\Gamma|\Phi_2$ *такой, что* $U_{\Gamma|\Phi_1}^{A_*}(\mathbf{s}_1) = U_{\Gamma|\Phi_2}^{A_*}(\mathbf{s}_2)$ *для любой группы игроков* A_**.*

Эта теорема позволяет считать изоморфные пространства корреляции неразличимыми в контексте поиска равновесий, устойчивых к как индивидуальным, так и групповым отклонениям.

4. Пространства заговоров

Теперь, получив осмысленный изоморфизм для пространств корреляции, выделим из всевозможных классов эквивалентности те, что допускают простое конечное описание и охватывают интересные случаи тайного согласования действий игроками. Для этого рассмотрим произвольное пространство корреляции $\Phi = \langle A, \Omega, \mathfrak{I}^a, \mathbb{P}, a \in A \rangle$. В этом пространстве для каждой непустой группы игроков $A_* \subseteq A$ определим следующее семейство событий:

$$\mathfrak{S}_\Phi^{A_*} = \{U \in \bigcap_{a \in A_*} \mathfrak{I}^a \mid \mathbb{P}(U \cap V) = \mathbb{P}(U)\mathbb{P}(V), \forall V \in \sigma(\bigcup_{a \in A \setminus A_*} \mathfrak{I}^a)\}.$$

Таким образом, $\mathfrak{S}_\Phi^{A_*}$ — множество всех таких событий, что о них осведомлены все члены A_*, и каждое событие попарно независимо со всеми событиями, известными не членам A_* даже при объединении их знаний. Поскольку пересечение σ-алгебр образует σ-алгебру, и так как подмножество независимых с некоторым событием событий σ-алгебры также образует σ-алгебру, то $\mathfrak{S}_\Phi^{A_*}$ — σ-алгебра. Это позволяет говорить о вероятностном подпространстве $\langle \Omega, \mathfrak{S}_\Phi^{A_*}, \mathbb{P} \rangle$, которое логично называть *тайной* группы A_*.

Важным для нас свойством этого подпространства является тип его меры [1, с. 81]. Особо выделим два случая: тайны с безатомическими мерами мы будем называть *полными*, а тайны с тривиальными атомическими мерами с единственным атомом Ω — *пустыми*. Это даёт возможность сформулировать следующее:

Определение 4.1. *Пространство корреляции $\langle A, \Omega, \mathfrak{I}^a, \mathbb{P}, a \in A \rangle$ назовём пространством заговоров структуры $\mathfrak{A} = \{A_1, ..., A_n\} \subseteq 2^A$, когда*

- $\bigcup_{i=0}^{n} A_i = A$;
- $\forall A_* \in \mathfrak{A}$, *тайна* A_* *полна;*
- $\forall A_* \notin \mathfrak{A}$, *тайна* A_* *пуста;*
- $\mathfrak{I}^a = \sigma(\bigcup_{a \in A_* \in \mathfrak{A}} \mathfrak{S}_\Phi^{A_*})$, *т.е.* $\mathfrak{I}^a$ — *наименьшая* σ*-алгебра, содержащая такие* $\mathfrak{S}_\Phi^{A_*}$, *что* $a \in A_* \in \mathfrak{A}$.

Проще говоря, пространствами заговоров называются такие пространства корреляции, в которых а) тайна любой группы игроков либо полна, либо пуста; б) каждый игрок входит хотя бы в одну группу с полной тайной и в) у игроков нет никаких знаний о состоянии природы, которые не порождались бы тайнами групп, которым они принадлежат. Построим для иллюстрации простейший пример такого пространства:

- $A = \{1, 2, 3\}$,
- $\Omega = [0, 1)^2$,
- $\mathfrak{I}^1 = \sigma(\{[0, p_1) \times [0, 1) \mid 0 < p_1 \leq 1\})$,
- $\mathfrak{I}^2 = \sigma(\{[0, 1) \times [0, p_2) \mid 0 < p_2 \leq 1\})$,
- $\mathfrak{I}^3 = \sigma(\{[0, p_1) \times [0, p_2) \mid 0 < p_1 \leq 1, 0 < p_2 \leq 1\})$,
- $\mathbb{P}$ — мера Лебега.

В этом примере пространство корреляции состоит из двух независимых вещественных рулеток, первый и второй игроки наблюдают по одной из них, а третий наблюдает обе. При этом выходит, что $\mathfrak{S}_\Phi^{\{1,3\}}$ совпадает с $\mathfrak{I}^1$, $\mathfrak{S}_\Phi^{\{2,3\}}$ совпадает с $\mathfrak{I}^2$, а для остальных групп $A_* \subseteq A$ соответствующая $\mathfrak{S}_\Phi^{A_*}$ тривиальна.

Структурой пространства (или *семейством заговоров*) называется множество всех групп игроков с полными тайнами. В вышеприведённом примере структура пространства $\mathfrak{A} = \{\{1, 3\}, \{2, 3\}\}$. С точки зрения допустимых профилей стратегий это означает, что любая группа игроков, входящая в семейство заговоров, может использовать общую тайну для формирования коррелированной стратегии, причём игроки не входящие в эту группу не могут присоединиться к согласованному таким образом выбору стратегий. Напротив, группы игроков, не входящие в семейство заговоров, вышеописанной возможностью не располагают. Структуру пространства можно считать его исчерпывающим конечным описанием, поскольку

Теорема 4.1. *Все пространства заговоров одной структуры изоморфны.*

Истинность этого утверждения следует из леммы A.8 (см. приложение). Теперь, когда установлено, что множество всех пространств заговоров разбивается на классы эквивалентности, нетрудно предложить способ конструирования стандартного представителя каждого класса по соответствующему семейству заговоров.

Определение 4.2. *Стандартным пространством структуры* $\mathfrak{A} = \{A_1, A_2, ..., A_n\}$ *называется пространство корреляции* $\Phi_{\mathfrak{A}} = \langle A, \Omega, \mathfrak{I}^a, \mathbb{P}, a \in A \rangle$ *со следующими параметрами:*

- $A = \bigcup\limits_{i=1}^{n} A_i$,
- $\Omega = [0,1)^n$,
- $\mathfrak{I}^a = \sigma(\{\prod\limits_{i=1}^{n} [0, p_i) \mid \textbf{if } a \in A_i \textbf{ then } 0 < p_i \leq 1 \textbf{ else } p_i = 1\})$,
- $\mathbb{P}$ — *мера Лебега.*

Множество состояний природы представляет собой n-мерный (по числу заговоров, входящих в семейство) единичный куб, а вероятностная мера соответствует непрерывному равномерному распределению. При этом σ-алгебра каждого игрока борелева в проекциях на оси, соответствующие заговорам в которые он входит, и тривиальна в проекциях на остальные оси. Выделение стандартного представителя для любых семейств заговоров позволяет использовать нотацию $\Gamma|\mathfrak{A}$, под которой в дальнейшем будет пониматься $\Gamma|\Phi_{\mathfrak{A}}$. Эта нотация подчёркивает тот факт, что выбор конкретного пространства корреляции среди всех пространств заговоров необходимой структуры для нас значения не имеет, а стандартное пространство выступает в роли простейшего представителя, пригодного для практических вычислений.

5. Интерпретация модели

Поскольку предлагаемая здесь модель является, в сущности, сужением оригинального ауманновского формализма, то интерпретация игры с любым семейством заговоров вполне может быть сведена к интерпретации игры в соответствующем стандартном пространстве корреляции. Это значит, что у групп заговорщиков, входящих в семейство, имеется по устройству, независимо генерирующему случайную величину, равномерно распределённую в диапазоне $[0, 1)$ (например, по рулетке без разделителей). Каждая рулетка запускается один раз, и каждый игрок планирует свой ход в зависимости от исхода тех из них, что принадлежат заговорам, в которые он входит. При этом, если игрок видит выгоду в корреляции своих действий с какой-то из групп, то его стратегия будет существенно зависеть от исхода соответствующей рулетки, тогда как рулетки групп, корреляция с которыми в его планы не входит, просто игнорируются.

Следует заметить, что такой механизм корреляции подразумевает не только наличие у игроков возможности наблюдать исход рулеток, но и общее знание о том, как именно следует интерпретировать эти наблюдения. Причиной этому является тот факт, что не существует никакого естественного и универсального отображения вещественных чисел на произвольные сочетания стратегий. Например, если двум игрокам с общей рулеткой x выгодно договориться о равновероятном выборе между профилями (s_1^1, s_1^2) и (s_2^1, s_2^2), то варианты $\{x < \frac{1}{2} \mapsto (s_1^1, s_1^2); x \geq \frac{1}{2} \mapsto (s_2^1, s_2^2)\}$ и $\{x < \frac{1}{2} \mapsto (s_2^1, s_2^2); x \geq \frac{1}{2} \mapsto (s_1^1, s_1^2)\}$ для них абсолютно равноправны. Однако, для успешной корреляции требуется, чтобы оба игрока выбрали один и тот же вариант отображения, так что без возможности выработать соглашение по этому вопросу обойтись нельзя.

С другой стороны, эта же модель подразумевает и возможность интерпретации, не скованной ограничениями физической интерпретации вероятностей. В силу доказанного изоморфизма пространств одной структуры можно надеяться на существование интерпретации, вообще не связанной с наблюдением игроками каких-то случайных событий, поскольку любое конкретное пространство событий, которые они могут наблюдать, является всего лишь одним из целого класса совершенно равноправных с точки зрения модели случаев. По этой причине такая предполагаемая интерпретация может оказаться абстрагирована от пространств корреляции в целом и не будет опираться на конкретный механизм, которым была достигнута тайная синхронизация. Отметив это, оставим построение такой интерпретации за рамками данной статьи.

6. Структурно согласованное равновесие

Предложенная выше интерпретация предполагает, что любая ситуация в игре с семейством заговоров является результатом некоторой договорённости внутри групп игроков, входящих в это семейство. Следовательно, разумно предположить, что любая ситуация, претендующая на равновесность, должна быть как минимум устойчива к отклонениям, являющимся результатами аналогичных по механизму договорённостей в рамках любого из тех же заговоров, — назовём такое свойство точек равновесия структурной согласованностью. Для его формализации сперва определим понятие приемлемого отклонения в рамках классической теории игр.

Определение 6.1. *Рассмотрим игру* $\Gamma = \langle A, S^a, u^a(s), a \in A\rangle$ *и реализующийся в ней профиль стратегий* $s \in S$. *Ситуацию* $s_* \neq s$ *назовём отклонением от* s*, приемлемым для группы игроков* $A_* \subseteq A$*, если*

- $\forall a \in A \setminus A_* \quad s^a = s^a_*$;
- $\forall a \in A_* \quad u^a(s_*) \geq u^a(s)$;
- $\forall a : s^a \neq s^a_* \quad u^a(s_*) > u^a(s)$.

Проще говоря, отклонение приемлемо для некоторой группы игроков, если а) все изменения стратегий происходят внутри группы игроков, б) новая стратегия не создаёт убытков участникам группы игроков, и в) все, кто меняют свои стратегии, получают прибыль. Это определение сконструировано таким образом, чтобы существование приемлемого для некоторой группы игроков отклонения от рассматриваемого профиля стратегий говорило о том, что такая ситуация не может быть продуктом разумного консенсуса в этой группе игроков. Это естественным образом ведёт к следующему определению:

Определение 6.2. *В игре с заговорами* $\Gamma|\mathfrak{A}$ *ситуация* $\mathbf{s}$ *является структурно согласованным равновесием, если для всех заговоров* $A_* \in \mathfrak{A}$ *отсутствуют приемлемые отклонения от ситуации* $\mathbf{s}$.

Следует заметить, что определённое подобным образом равновесие является обобщением классического равновесия в смешанных стратегиях. Чтобы получить модель, описывающую классическое смешанное расширение игры $\Gamma = \langle A, S^a, u^a(s), a \in A \rangle$, достаточно рассмотреть семейство заговоров структуры $\mathfrak{M}(A) = \{\{a\} \mid a \in A\}$, то есть, состоящее только из заговоров мощности 1. Множества достижимых выплат в игре $\Gamma|\mathfrak{M}(A)$ и смешанном расширении игры Γ очевидно совпадают. Кроме того, совпадают множества достижимых выплат в точках структурно согласованного равновесия игры $\Gamma|\mathfrak{M}(A)$ и точках смешанного равновесия по Нэшу игры Γ.

Вопрос о стабильных семействах заговоров (т.е. обеспечивающих существование структурно согласованного равновесия для любой игры) пока оставим открытым. Однако, можно выдвинуть гипотезу о том, что он может быть разрешён способом, аналогичным решению вопроса о стабильности семейств коалиций [7], и тогда стабильность семейства заговоров может оказаться равносильна нормальности соответствующего этому семейству гиперграфа.

7. Сравнение с дизайном механизмов

На концепцию коррелированного расширения опирается такая плодотворная область исследований как созданный Л. Гурвичем, Э. Маскиным и Р. Майерсоном „дизайн механизмов“ [3]. В их модели под механизмом обычно понимается система взаимодействий между многочисленными субъектами и „центром“, в которой игроки могут сообщать центру о своих предпочтениях (подразумевается возможность лжи), и/или получать от него указания о выборе стратегии (подразумевается возможность неповиновения). При этом процесс согласования действий разных субъектов при помощи корреляционных механизмов происходит только в центре, а сами игроки лишены возможности горизонтальной координации. Соответственно, главной задачей является создание систем, делающих стратегии правдивости и послушания оптимальными в смысле устойчивости к индивидуальным отклонениям. В свете этого и предыдущих разделов статьи становится ясна разница подходов с моделью заговоров.

Дизайн механизмов предполагает существование лишь одной точки принятия решения о корреляции всех со всеми, оставляя за игроками право только на индивидуальные отклонения от равновесной стратегии. На это существенным образом опирается краеугольный камень модели — *принцип выявления*, в применении к коррелированному расширению означающий, что для любого механизма корреляции с произвольным пространством сигналов найдётся функционально идентичный прямой механизм, использующий в качестве пространства сигналов пространство стратегических профилей, т.е. дающий игрокам прямые указания к выбору стратегии. Таким образом, в качестве домена коррелированных стратегий выступает само множество чистых стратегий, а равновесные стратегии всегда являются тождественным отображением. Такая простая структура пространства стратегических профилей сильно облегчает анализ игр, но проблема в том, что для моделирования множества реальных конфликтов требования единственности источника корреляции и индивидуальности принятия решений игроками могут быть слишком сильными упрощениями — в самом деле, легко ли создание соответствующих условий даже для искусственных формальных процедур вроде аукционов и голосований?

Напротив, в предлагаемой здесь модели каждый заговор является независимым механизмом корреляции, а его участники принимают коллективные решения об изменении стратегий. С одной стороны это не позволяет сформулировать прямого аналога принципа выявления — здесь в качестве домена коррелированных стратегий (в стандартном пространстве заговоров) выступают борелевские единичные многомерные кубы, что в сравнении с прямыми механизмами затрудняет анализ игровых ситуаций. С другой же стороны, в перспективе это могло бы способствовать моделированию более широкого класса многосторонних конфликтов, испытывающих существенное влияние информационной асимметрии между группами игроков.

8. Устойчивость к отклонениям

При анализе многосторонних конфликтов нередко возникают ситуации, когда требуются более строгие принципы оптимальности по сравнению с обычным коррелированным равновесием. Чаще всего в роли такого уточнения выступает равновесие дрожащей руки, дополнительно гарантирующее устойчивость к достаточно малым случайным отклонениям от равновесных стратегий. Например, в [8] эта концепция анализируется в контексте вышеупомянутого дизайна механизмов. Хотя в связи с вышеописанными существенными различиями подходов полученные в этой статье результаты не переносятся на модель заговоров напрямую, аналогичным образом можно попытаться уточнить и структурно согласованное равновесие. Отклонение вследствие дрожащей руки подразумевает, что корреляционный механизм срабатывает без ошибок, игроки получают предназначенные им сигналы и выбирают в зависимости от них чистые стратегии, но в последний момент с вероятностью ε любой из них может промахнуться по кнопке в пользу предопределённой и не зависящей от сигнала смешанной стратегии. Попробуем выразить это более формально.

Пусть в игре $\Gamma = \langle A, S^a, u^a(s), a \in A \rangle$ структура $\mathfrak{A}$ пространства заговоров содержит все одноэлементные группы, т.е. игроки могут использовать смешанные стратегии. Для каждого игрока a зададим меру ε^a на множестве его стратегий S^a, характеризующую вероятности ошибок, которые игрок может допустить в пользу соответствующих стратегий. Коррелированную стратегию $\mathbf{s}^a$ в игре $\Gamma|\mathfrak{A}$ будем считать ε^a-приближенной, если для каждого $s^a \in S^a$ найдётся подмножество значений индивидуальной рулетки игрока меры $\varepsilon^a(s^a)$ такое, что на нём $\mathbf{s}^a$ тождественно равно s^a вне зависимости от значений других рулеток. Ограничив множества стратегий игроков ε-приближённостью для произвольного набора мер $\varepsilon = (\varepsilon^a, a \in A)$, мы получаем ε-приближение игры $\Gamma|\mathfrak{A}$. Это позволяет сформулировать определение:

Определение 8.1. *Набор коррелированных стратегий* $\mathbf{s}$ *является структурно согласованным равновесием дрожащей руки в игре с заговорами* $\Gamma|\mathfrak{A}$*, если для каждой сходящейся к нулю (по мере наибольшего элемента) последовательности наборов ошибок* (ε_i) *можно найти сходящуюся к* $\mathbf{s}$ *в метрике* $d(\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2) = \mathbb{P}(\mathbf{s}_1 \neq \mathbf{s}_2)$ *последовательность стратегических профилей* $(\mathbf{s}_i)$ *такую, что, начиная с некоторого, каждый* $\mathbf{s}_i$ *является структурно согласованным равновесием в* ε_i*-приближении той же игры.*

По смыслу такое определение аналогично данному в [8] и является обобщением равновесия дрожащей руки для игр в смешанных стратегиях — достаточно по рецепту раздела 6 взять семейство заговоров, состоящее только из одноэлементных групп игроков. Соответственно, так же как и в случае смешанного расширения, требование устойчивости к редким ошибкам игроков очевидно сужает пространство равновесий, причём можно надеяться, что в дальнейшем удастся доказать следующую гипотезу:

Предположение 8.1. *Если некоторое семейство заговоров обеспечивает существование структурно согласованного равновесия в каждой игре, то это же верно и для структурно согласованных равновесий дрожащей руки.*

9. Применение модели

Укажем менее тривиальный пример конфликта, соответствующего игре с заговорами. Представим себе некий комитет, выбирающий нового председателя из двух кандидатур методом открытого голосования простым большинством (во избежание „ничьи“ будем считать что голосует нечётное число участников). У членов нашего комитета на самом деле нет никаких собственных предпочтений по поводу предлагаемых кандидатур, однако все понимают, что, поскольку голосование открытое, то новый председатель, конечно, запомнит голосовавших против него, что может негативно отразиться на их перспективах. Смоделируем это, обозначив суммарную благосклонность нового председателя за 1. Отдавшие голоса в пользу другого кандидата его благосклонности не получают, так что их выигрыш равен 0. Голосовавшие же за нового председателя получают равные доли $\frac{1}{k}$, где k — их количество.

$$\Gamma = \langle A = \{1, ..., m\}, S^a = \{L, R\}, u^a(s), a \in A\rangle$$

$$u^a(s) = \begin{cases} 0, & t^a(s) < \frac{m}{2} \\ \frac{1}{t^a(s)}, & t^a(s) > \frac{m}{2} \end{cases}, t^a(s) = \left|\{b \in A \mid s^b = s^a\}\right|$$

В чём же заключается сложность анализа таких игр с позиций классической теории игр в нормальной форме? Если рассматривать эту игру как некооперативную, то существенно различных равновесных по Нэшу исходов можно ожидать всего два: единогласное голосование за одного из кандидатов и независимый случайный равновероятный выбор между кандидатами каждым из игроков. Оба предсказания обеспечивают игрокам равные ожидаемые выплаты и кажутся на первый взгляд тривиально верными с разумными интерпретациями. Единогласного голосования легко ожидать при очной процедуре, когда каждый заседающий может наблюдать, в чью пользу склоняется чаша весов в обсуждении и присоединиться к победителям. Интерпретация второго варианта выглядит чуть более натянуто, однако и это предсказание можно представить осуществляющимся при заочном голосовании, например, по почте, в ситуации, когда члены комитета вообще не имеют возможности обсудить предстоящее голосование, так что в этом случае выбор каждого игрока равновероятен просто в силу соображений симметрии, ведь по условию модели члены комитета не имеют никаких исходных предпочтений по поводу кандидатур и не имеют оснований ожидать от остальных какой-либо асимметрии.

Проблема в том, что такой анализ игры никак нельзя считать исчерпывающим, поскольку легко можно представить себе гибридную ситуацию, не вписывающуюся в рамки классической теории игр в нормальной форме. В качестве контр-примера допустим, что процедура голосования неоднородна — более половины членов комитета собрались на заседании для обсуждения кандидатур, однако некоторые участники не смогли явиться и вынуждены послать свои голоса почтой. В такой ситуации разумно ожидать, что присутствующие на заседании члены комитета единогласно выберут одного из кандидатов, обеспечив ему гарантированную победу, тогда как голосующие удалённо, не имея информации о происходящем на заседании, вынуждены будут выбирать случайно. Следует заметить, что для такого исхода, несмотря на его очевидность, не существует соответствующей точки равновесия по Нэшу ни в чистых, ни в смешанных стратегиях, что говорит о неполноте анализа модели.

Пусть из m членов комитета участвующих в голосовании, k первых по счёту не присутствуют на заседании, и $k < \frac{m}{2}$. Определим семейство заговоров, по своей интерпретации соответствующее описанной ситуации. Во-первых, каждый игрок имеет возможность принять собственное решение втайне от остальных, а значит в семейство входят заговоры $A_1 = \{1\}, ..., A_m = \{m\}$. Во-вторых, те игроки, что присутствуют на заседании, имеют возможность принять совместное решение втайне от отсутствующих, что даёт заговор $A_0 = \{k+1, ..., m\}$.

В сумме это соответствует семейству

$$\mathfrak{A} = \{A_0, A_1, ..., A_m\} = \{\{k+1, ..., m\}, \{1\}, ..., \{m\}\}.$$

Для перехода к формализму Ауманна выпишем в явном виде стандартное пространство заговоров $\Phi_{\mathfrak{A}} = \langle A, \Omega, \mathfrak{I}^a, \mathbb{P}, a \in A \rangle$. Его состояние природы по определению состоит из $m+1$ независимых рулеток, по одной на каждый из заговоров, входящих в структуру пространства:

- $\Omega = [0,1)^{(m+1)}$;
- $\mathfrak{I}^a = \sigma(\{\prod\limits_{i=0}^{m} [0, p_i) \mid \textbf{if } a \in A_i \textbf{ then } 0 < p_i \leq 1 \textbf{ else } p_i = 1\})$,
- $\mathbb{P}$ — мера Лебега.

Таким образом, мы переходим к анализу игры:

$$\Gamma | \mathfrak{A} = \langle A, \mathbf{S}^a, u^a(\mathbf{s}), a \in A \rangle.$$

Далее исходы индивидуальных рулеток игроков (соответствующих заговорам $\{1\}, ..., \{m\}$) обозначаются как $\omega^1, \omega^2, ..., \omega^m$, а исход рулетки заседания (соответствующей заговору $\{k+1, ..., m\}$) обозначается как ω^0. Запишем пространства стратегий игроков в сокращённом виде, оставив в качестве их аргументов только существенные переменные:

$$\mathbf{S}^a = \begin{cases} \{\mathbf{s}^a \mid \mathbf{s}^a(\omega^a) \in \{L, R\}\}, & a \in A \setminus A_0, \\ \{\mathbf{s}^a \mid \mathbf{s}^a(\omega^a, \omega^0) \in \{L, R\}\}, & a \in A_0, \end{cases}$$

где $\mathbf{s}^a$ — борелевские функции. Функции выигрышей принимают при этом вид:

$$u^a(\mathbf{s}) = \int\limits_0^1 \sum_{s \in S} u^a(s) \prod_{i=1}^{k} \mathbf{p}^i(s^i) \prod_{i=k+1}^{m} \mathbf{p}^i(s^i, \omega^0) d\omega^0,$$

$$\mathbf{p}^i(s^i) = \mathbb{P}(\{\omega^i | \mathbf{s}^i(\omega^i) = s^i\}), i \in \{1, ..., k\},$$

$$\mathbf{p}^i(s^i, \omega^0) = \mathbb{P}(\{\omega^i | \mathbf{s}^i(\omega^i, \omega^0) = s^i\}), i \in \{k+1, ..., m\}.$$

Теперь мы можем проверить на структурно согласованное равновесие ситуацию, в которой отсутствующие на заседании выбирают из двух опций равновероятно и независимо, а присутствующие — равновероятно и синхронно. Опишем это следующим образом:

$$\mathbf{s}^a(\omega^a) = \begin{cases} L, & \omega^a \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ R, & \omega^a \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}, a \in A \setminus A_0,$$

$$\mathbf{s}^a(\omega^a, \omega^0) = \begin{cases} L, & \omega^0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right) \\ R, & \omega^0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right) \end{cases}, a \in A_0.$$

В этом случае

$$\mathbf{p}^a(L) = \mathbf{p}^a(R) = \frac{1}{2}, a \in A \setminus A_0,$$

$$\begin{cases} \mathbf{p}^a(L, \omega^0) = \mathbf{p}^a(R, \omega^0 + \frac{1}{2}) = 1 \\ \mathbf{p}^a(R, \omega^0) = \mathbf{p}^a(L, \omega^0 + \frac{1}{2}) = 0 \end{cases}, a \in A_0, \omega^0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right).$$

Сперва рассмотрим ситуацию с точки зрения индивидуальных отклонений игрока $a \in A \setminus A_0$:

$$\begin{aligned} u^a(\mathbf{s}) = \mathbf{p}^a(L) \sum_{s \in S, s^a = L} u^a(s) \prod_{i \in A \setminus A_0 \setminus \{a\}} \mathbf{p}^i(s^i) \int_0^1 \prod_{i \in A_0} \mathbf{p}^i(s^i, \omega^0) d\omega^0 + \\ \mathbf{p}^a(R) \sum_{s \in S, s^a = R} u^a(s) \prod_{i \in A \setminus A_0 \setminus \{a\}} \mathbf{p}^i(s^i) \int_0^1 \prod_{i \in A_0} \mathbf{p}^i(s^i, \omega^0) d\omega^0 = \\ \mathbf{p}^a(L) \sum_{s \in S, s^a = s^{k+1} = s^{k+2} = \ldots = s^m = L} \frac{u^a(s)}{2^k} + \\ \mathbf{p}^a(R) \sum_{s \in S, s^a = s^{k+1} = s^{k+2} = \ldots = s^m = R} \frac{u^a(s)}{2^k}. \end{aligned}$$

Здесь первая и вторая сумма очевидно равны, а значит игрок не может улучшить свой выигрыш. Далее проверим индивидуальные отклонения игроков $a \in A_0$:

$$u^a(\mathbf{s}) = \int\limits_0^1 \mathbf{p}^a(L,\omega^0) \sum_{s\in S, s^a=L} u^a(s) \prod_{i\in A\setminus A_0} \mathbf{p}^i(s^i) \prod_{i\in A_0\setminus\{a\}} \mathbf{p}^i(s^i,\omega^0) d\omega^0 +$$
$$\int\limits_0^1 \mathbf{p}^a(R,\omega^0) \sum_{s\in S, s^a=R} u^a(s) \prod_{i\in A\setminus A_0} \mathbf{p}^i(s^i) \prod_{i\in A_0\setminus\{a\}} \mathbf{p}^i(s^i,\omega^0) d\omega^0 =$$
$$\int\limits_0^{\frac{1}{2}} \mathbf{p}^a(L,\omega^0) \sum_{s\in S, s^{k+1}=s^{k+2}=\ldots=s^m=L} \frac{u^a(s)}{2^k} d\omega^0 +$$
$$\int\limits_{\frac{1}{2}}^1 \mathbf{p}^a(R,\omega^0) \sum_{s\in S, s^{k+1}=s^{k+2}=\ldots=s^m=R} \frac{u^a(s)}{2^k} d\omega^0.$$

Из этого следует, что для игрока $a \in A_0$ наилучшей будет стратегия, при $\omega^0 \in \left[0, \frac{1}{2}\right)$ за вычетом множеств меры нуль максимизирующая $\mathbf{p}^a(L,\omega^0)$, а при $\omega^0 \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$ максимизирующая $\mathbf{p}^a(R,\omega^0)$, что и достигается в проверяемом профиле стратегий. Аналогичным образом проверяется и отсутствие приемлемых коллективных отклонений для заговора A_0 (тут любое нетривиальное отклонение очевидно уменьшает выплаты хотя бы одного из участников заговора). Тем самым получаем, что этот профиль стратегий в игре $\Gamma|\Phi$ удовлетворяет условиям структурно согласованного равновесия.

Важно здесь то, что, хотя мы проверяли на равновесность ситуацию в игре, расширенной конкретным, искусственно сконструированным пространством заговоров, благодаря центральной теореме статьи мы можем быть уверены, что в любом другом коррелированном расширении данной игры с пространством заговоров той же структуры $\mathfrak{A}$ будет существовать равновесие с таким же набором выплат.

A. Приложение

Для доказательства теоремы об изоморфных пространствах нам придётся ввести дополнительный инструментарий.

Определение A.1. *Измельчением множества исходов* $X = X^1 \times \ldots \times X^m$ *до конечного множества исходов* $Y = Y^1 \times \ldots \times Y^m$ *называ-*

ется любое отображение $\rho = (\rho^1, \ldots, \rho^m)$, где каждая компонента ρ^a отображает Y^a в X^a.

При помощи измельчений можно задавать связи между разбиениями с различными кодоменами. Если разбиения $f : \Omega \to X$ и $g : \Omega \to Y$ таковы, что $f = \rho \circ g$, то $f^{-1}(x) = \bigcup_{y \in \rho^{-1}(x)} g^{-1}(y), \forall x \in X$. При этом f можно называть измельчимым до g.

Разбиения одного и того же пространства можно комбинировать. Например, из разбиений $g_i : \Omega \to Y_i = Y_i^1 \times \ldots \times Y_i^m, i = \overline{1,n}$ можно построить их комбинацию $g_1 \diamond \ldots \diamond g_n : \Omega \to Y_{(n)}$, где $Y_{(n)}^a = Y_1^a \times \ldots \times Y_n^a$ и $(g_1 \diamond \ldots \diamond g_n)^a(\omega) = (g_1^a(\omega), \ldots, g_n^a(\omega)), \forall \omega \in \Omega, a = \overline{1,m}$. Эта комбинация разбиений связана со своими компонентами измельчениями-проекциями: $g_i = \pi_i \circ (g_1 \diamond \ldots \diamond g_n), \pi_i^a(x_1^a, \ldots, x_n^a) = x_i^a$.

Аналогично комбинируются и измельчения с общим кодоменом. Например, из измельчений $\rho_i : Y_i \to X, i = \overline{1,n}$ можно построить комбинацию $\rho_1 \wr \ldots \wr \rho_n : Y_{[n]} \to X$, где $Y_{[n]}^a = \{(y_1^a, \ldots, y_n^a) \in Y_{(n)}^a \mid \rho_1^a(y_1^a) = \ldots = \rho_n^a(y_n^a)\}, a = \overline{1,m}$, причём на своей области определения $\rho_1 \wr \ldots \wr \rho_n$ совпадает со всеми $\rho_i \circ \pi_i$. Заметим, что

$$f = \rho_i \circ g_i, i = \overline{1,n} \;\Leftrightarrow\; f = (\rho_1 \wr \ldots \wr \rho_n) \circ (g_1 \diamond \ldots \diamond g_n).$$

Определение A.2. *В пространстве корреляции $\Phi = \langle A, \Omega, \mathfrak{I}^a, \mathbb{P}, a \in A\rangle$ структурой разбиения $f : \Omega \to X$, порождённой измельчением $\rho : Y \to X$, называется множество $H_{\Phi,\rho}(f) = \{\mathbb{P} \circ g^{-1} \mid g \models \Phi, f = \rho \circ g\}$, состоящее из мер $\mu : Y \to \mathbb{R}_{\geq 0}$. Также обозначим $H_{\Phi,\rho}^{-1}(\mu) = \{f \models \Phi \mid \mu \in H_{\Phi,\rho}(f)\}$.*

Лемма A.1. *Для всех $\rho : Y \to X$ и $\mu : Y \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ множество $H_{\Phi,\rho}^{-1}(\mu) \subseteq X^\Omega$ компактно в полуметрике*

$$\mathrm{dis}(f_1, f_2) = \frac{1}{2} \sum_{x \in X} \left|\mathbb{P}(f_1^{-1}(x)) - \mathbb{P}(f_2^{-1}(x))\right|.$$

Доказательство. Переформулируем $H_{\Phi,\rho}^{-1}(\mu) = \rho \circ H_\Phi^{-1}(\mu)$, определив $H_\Phi^{-1}(\mu) = \{g \models \Phi \mid \mathbb{P} \circ g^{-1} = \mu\}$. Докажем сперва компактность $H_\Phi^{-1}(\mu)$, вводя $\mathrm{dis}(g_1, g_2)$ аналогично $\mathrm{dis}(f_1, f_2)$. Полуметрика dis вполне ограниченна, так как $\mathrm{dis}(g_1, g_2) = d(\mu_1^Y, \mu_2^Y)$, где $\mu_k^Y = \mathbb{P} \circ g_k^{-1}, k = 1, 2$, а пространство вероятностных мер на любом конечном множестве вполне ограниченно. Замкнутость $H_\Phi^{-1}(\mu)$ очевидно следует из $\mathrm{dis}(g_1, g_2) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P} \circ g_1^{-1} = \mathbb{P} \circ g_2^{-1}$. Таким образом $H_\Phi^{-1}(\mu)$ компактно в полуметрике dis. Докажем непрерывность отображения $\rho \circ : Y^\Omega \to X^\Omega$, выразив ту же полуметрику по-другому:

$$\mathrm{dis}(f_1, f_2) = 1 - \sum_{x \in X} \min\left[\mathbb{P}(f_1^{-1}(x)), \mathbb{P}(f_2^{-1}(x))\right].$$

Пусть теперь $f_1 = \rho \circ g_1$ и $f_2 = \rho \circ g_2$:

$$\begin{aligned}
\mathrm{dis}(\rho \circ g_1, \rho \circ g_2) &= 1 - \sum_{x \in X} \min\left[\mathbb{P}(g_1^{-1}(\rho^{-1}(x))), \mathbb{P}(g_2^{-1}(\rho^{-1}(x)))\right] \\
&= 1 - \sum_{x \in X} \min\left[\sum_{y \in \rho^{-1}(x)} \mathbb{P}(g_1^{-1}(y)), \sum_{y \in \rho^{-1}(x)} \mathbb{P}(g_2^{-1}(y))\right] \\
&\le 1 - \sum_{x \in X} \sum_{y \in \rho^{-1}(x)} \min\left[\mathbb{P}(g_1^{-1}(y)), \mathbb{P}(g_2^{-1}(y))\right] \\
&= 1 - \sum_{y \in Y} \min\left[\mathbb{P}(g_1^{-1}(y)), \mathbb{P}(g_2^{-1}(y))\right] = \mathrm{dis}(g_1, g_2).
\end{aligned}$$

Отображение $\rho \circ$ непрерывно, поскольку $\mathrm{dis}(\rho \circ g_1, \rho \circ g_2) \le \mathrm{dis}(g_1, g_2)$. Так как непрерывные отображения сохраняют компактность [4, с. 199], $H_{\Phi,\rho}^{-1}(\mu) = \rho \circ H_\Phi^{-1}(\mu)$ компактно в полуметрике dis. □

Определение A.3. *Разбиение $f_2 \models \Phi_2$ называется точным образом разбиения $f_1 \models \Phi_1$ (далее $f_1 \precsim f_2$), если их кодомены совпадают ($X_1 = X_2 = X$) и $H_{\Phi_1,\rho}(f_1) \subseteq H_{\Phi_2,\rho}(f_2)$ для всех измельчений ρ с тем же кодоменом. Множество всех точных образов далее будем обозначать $\widehat{\Phi}_2(f_1) = \{f_2 \models \Phi_2 \mid f_1 \precsim f_2\}$.*

Отношение $f_1 \precsim f_2$ можно понять так — на какие бы измеримые части мы не делили компоненты разбиения f_1, в разбиении f_2 соответствующие компоненты всегда можно разделить на равные им по мере части.

Замечание A.1. Очевидно, что $f_1 \precsim f_2 \wedge f_2 \precsim f_3 \Rightarrow f_1 \precsim f_3$.

Лемма A.2. *Пусть в пространствах корреляции Φ_1 и Φ_2 разбиения $g_1 : \Omega_1 \to Y$ и $g_2 : \Omega_2 \to Y$ таковы, что $g_1 \precsim g_2$. Тогда $\rho \circ g_1 \precsim \rho \circ g_2$ для всех измельчений $\rho : Y \to X$.*

Доказательство. Возьмём любые $\rho_* : Y_* \to X$ и $\mu \in H_{\Phi_1,\rho_*}(\rho \circ g_1)$. По определению структуры разбиения, $\exists g_{1*} : \rho_* \circ g_{1*} = \rho \circ g_1, \mathbb{P}_1 \circ g_{1*}^{-1} = \mu$, а доказать требуется, по определению точного образа, что $\exists g_{2*} : \rho_* \circ g_{2*} = \rho \circ g_2, \mathbb{P}_2 \circ g_{2*}^{-1} = \mu$. Рассмотрим комбинацию $g_{1+} = g_1 \diamond g_{1*}$, где $g_1 = \pi \circ g_{1+}$ и $g_{1*} = \pi_* \circ g_{1+}$. Здесь $g_{1+} : \Omega_1 \to Y_+, Y_+^a = Y^a \times Y_*^a, a = \overline{1,m}$. По определению структуры разбиения, $\mathbb{P}_1 \circ g_{1+}^{-1} \in H_{\Phi_1,\pi}(g_1)$, а значит, поскольку $g_1 \precsim g_2$, существует $g_{2+} : \Omega_2 \to Y_+$ такое, что $\mathbb{P}_1 \circ g_{1+}^{-1} = \mathbb{P}_2 \circ g_{2+}^{-1} \in H_{\Phi_2,\pi}(g_2)$, т.е. $\pi \circ g_{2+} = g_2$. Из этого с очевидностью следует, что и $\mathbb{P}_2 \circ (\pi_* \circ g_{2+})^{-1} = \mathbb{P}_1 \circ (\pi_* \circ g_{1+})^{-1}$, а значит $g_{2*} = \pi_* \circ g_{2+}$ искомое. □

Лемма А.3. *Пусть в пространствах корреляции Φ_1 и Φ_2 разбиения $f_1 : \Omega_1 \to X$ и $f_2 : \Omega_2 \to X$ таковы, что $f_1 \precsim f_2$. Тогда для каждого измельчения $\rho : Y \to X$ и каждого разбиения $g_1 : \Omega_1 \to Y$ такого, что $f_1 = \rho \circ g_1$ существует разбиение $g_2 : \Omega_2 \to Y$ такое, что $f_2 = \rho \circ g_2$ и $g_1 \precsim g_2$.*

Доказательство. Сформулируем требуемое как $\exists g_2 \in \widehat{\Phi}_2(g_1) : f_2 = \rho \circ g_2$ и выразим $\widehat{\Phi}_2$ через структуры разбиений:

$$\widehat{\Phi}_2(g_1) = \bigcap_{\forall Z,\xi:Z\to Y,\mu\in H_{\Phi_1,\xi}(g_1)} H^{-1}_{\Phi_2,\xi}(\mu).$$

По лемме А.1 множество $\widehat{\Phi}_2(g_1)$ является пересечением семейства компактов. Следовательно, для доказательства содержания в нём элемента $g_2 : f_2 = \rho \circ g_2$, достаточно доказать, что такой элемент содержится в пересечении каждого конечного подсемейства тех же компактов:

$$\exists g_{2*} \in \bigcap_{i=1}^{n} H^{-1}_{\Phi_2,\xi_i}(\mu_i) : f_2 = \rho \circ g_{2*},$$

где $\xi_i : Z_i \to Y$ — произвольные измельчения с произвольными доменами Z_i и $\mu_i \in H_{\Phi_1,\xi_i}(g_1)$ также выбраны произвольно.

По определению структуры разбиения $\exists h_{1,i} \models \Phi_1 : g_1 = \xi_i \circ h_{1,i}, \mathbb{P} \circ h_{1,i}^{-1} = \mu_i$. Построим их комбинацию $h_1 = h_{1,1} \diamond ... \diamond h_{1,n}$, где $h_{1,i} = \pi_i \circ h_1$, и обозначим $\xi = \xi_1 \wr ... \wr \xi_n$. По определению точного отображения $\exists h_2 \models \Phi_2 : f_2 = \rho \circ \xi \circ h_2, \mathbb{P}_1 \circ h_1^{-1} = \mathbb{P}_2 \circ h_2^{-1}$, а значит можно взять $g_{2*} = \xi \circ h_2$. По построению $f_2 = \rho \circ g_{2*}$ и $\mathbb{P}_1 \circ h_{1,i}^{-1} = \mathbb{P}_1 \circ (\pi_i \circ h_1)^{-1} = \mathbb{P}_2 \circ (\pi_i \circ h_2)^{-1} = \mathbb{P}_2 \circ h_{2,i}^{-1}$, следовательно g_{2*} — искомое. □

Следствие А.1. *Если пространства корреляции $\Phi_1 \precsim \Phi_2$, то для каждого разбиения $f_1 \models \Phi_1$ существует $f_2 \models \Phi_2$ такое, что $f_1 \precsim f_2$.*

Следствие А.2. *Леммы А.2, А.3 и следствие А.1 также верны для строгого отношения* $f_1 \prec f_2 \equiv f_1 \precsim f_2 \cap \neg(f_1 \succsim f_2)$.

Лемма А.4. $f_1 \precsim f_2 \Leftrightarrow f_1 \succsim f_2$ *для любых разбиений одного и того же пространства корреляции.*

Доказательство. Предположим обратное — существование $f_1 \prec f_2$ с кодоменом X. Тривиальное измельчение $\theta(x) = (0, \ldots, 0), \forall x \in X$ очевидно даёт $\theta \circ f_1 = \theta \circ f_2$. Это противоречит $\theta \circ f_1 \prec \theta \circ f_2$, следующему из леммы А.2. □

Следствие А.3. $f_1 \precsim f_2 \Leftrightarrow f_1 \succsim f_2$ *для любых разбиений изоморфных пространств корреляции.*

Доказательство теоремы об изоморфных пространствах. Возьмём произвольный профиль стратегий $\mathbf{s}_1$ игры $\Gamma|\Phi_1$. Этот профиль, очевидно, является разбиением пространства корреляции Φ_1. По следствию А.1 существует разбиение $\mathbf{s}_2$ пространства корреляции Φ_2 такое, что $\mathbf{s}_1 \precsim \mathbf{s}_2$, причём, аналогично, $\mathbf{s}_2$ является ещё и профилем стратегий в игре $\Gamma|\Phi_2$. Докажем вложения в обоих направлениях: 1. $U^{A_*}_{\Gamma|\Phi_1}(\mathbf{s}_1) \subseteq U^{A_*}_{\Gamma|\Phi_2}(\mathbf{s}_2)$ и 2. $U^{A_*}_{\Gamma|\Phi_1}(\mathbf{s}_1) \supseteq U^{A_*}_{\Gamma|\Phi_2}(\mathbf{s}_2)$ для любой группы игроков A_*:

1. Рассмотрим произвольный профиль $\mathbf{s}_{1*} \models \Phi_1$, отличающийся от $\mathbf{s}_1$ стратегиями группы A_*. Обозначим $\mathbf{s}_{1+} = \mathbf{s}_1 \diamond \mathbf{s}_{1*}$, где $\mathbf{s}_1 = \pi \circ \mathbf{s}_{1+}$ и $\mathbf{s}_{1*} = \pi_* \circ \mathbf{s}_{1+}$. По определению точного образа $H_{\Phi_1,\pi}(\mathbf{s}_1) \subseteq H_{\Phi_2,\pi}(\mathbf{s}_2)$, т.е. $\exists \mathbf{s}_{2+} \models \Phi_2 : \mathbb{P}_1 \circ \mathbf{s}_{1+} = \mathbb{P}_2 \circ \mathbf{s}_{2+}, \mathbf{s}_2 = \pi \circ \mathbf{s}_{2+}$. По построению $\mathbf{s}_{2*} = \pi_* \circ \mathbf{s}_{2+}$ отличается от $\mathbf{s}_2$ ходами тех же игроков, что отличают $\mathbf{s}_{1*}$ от $\mathbf{s}_1$, и $\mathbb{P}_1 \circ \mathbf{s}_{1*}^{-1} = \mathbb{P}_2 \circ \mathbf{s}_{2*}^{-1}$, а значит аналогичным образом $u^a(\mathbf{s}_{1*}) = u^a(\mathbf{s}_{2*})$. В силу произвольности выбора $\mathbf{s}_{1*}$ это влечёт $U^{A_*}_{\Gamma|\Phi_1}(\mathbf{s}_1) \subseteq U^{A_*}_{\Gamma|\Phi_2}(\mathbf{s}_2)$.

2. Так как $\mathbf{s}_1 \succsim \mathbf{s}_2$ по следствию А.3, рассуждения предыдущего пункта применимы и в обратном направлении.

□

Для доказательства теоремы об изоморфизме пространств заговоров так же понадобится несколько лемм.

Лемма А.5. *Для любого счётного семейства множеств $\mathfrak{F}$ найдётся цепь множеств $\mathfrak{T}$ такая, что $\sigma(\mathfrak{F}) = \sigma(\mathfrak{T})$.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{F} = \{F_1, F_2, \ldots\}$. Построим индуктивно последовательность цепей $(\mathfrak{T}_i)$, где каждая следующая цепь включает в себя предыдущую и $\sigma(\mathfrak{T}_i) = \sigma(\{F_1, \ldots, F_i\})$. В качестве базы возьмём $\mathfrak{T}_1 = \{F_1\}$. Шаг индукции: пусть $\mathfrak{T}_{i-1} = \{T_1, \ldots, T_n\}, T_1 \subset \ldots \subset T_n$ и $\sigma(\mathfrak{T}_{i-1}) = \sigma(\{F_1, \ldots, F_{i-1}\})$. Разложим следующий элемент $\mathfrak{F}$ на непересекающиеся дизъюнкты: $F_i = (F_i \cap T_1) \cup (F_i \cap T_2 \setminus T_1) \cup \ldots \cup (F_i \cap T_n \setminus T_{n-1}) \cup (F_i \setminus T_n)$. В этой записи j-й дизъюнкт вложен в соответствующую разность $T_j \setminus T_{j-1}$ соседних элементов цепи. Следовательно, для его порождения достаточно пополнить $\mathfrak{T}_{i-1}$ множеством $T_{j-} = F_i \cap T_j \cup T_{j-1}$, сохраняющим структуру цепи, поскольку $T_{j-1} \subseteq T_{j-} \subseteq T_j$. Таким образом, чтобы получить F_i целиком,

$$\mathfrak{T}_i = \mathfrak{T}_{i-1} \cup \left\{ \begin{array}{l} F_i \cap T_1, \\ F_i \cap T_2 \cup T_1, \\ \cdots \\ F_i \cap T_n \cup T_{n-1}, \\ F_i \cup T_n \end{array} \right\}$$

Покажем, что предел последовательности $(\mathfrak{T}_i)$ — искомая цепь. В самом деле, любой элемент из $\sigma(\mathfrak{F})$ — это счётное объединение конечных пересечений множеств F_i. Поэтому

$$\sigma(\mathfrak{F}) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \sigma(\{F_1, \ldots, F_i\}) = \bigcup_{i=1}^{\infty} \sigma(\mathfrak{T}_i) = \sigma(\mathfrak{T}).$$

□

Лемма А.6. *Максимальная цепь измеримых множеств в безатомическом пространстве порождает безатомическую σ-алгебру.*

Доказательство. Пусть максимальная цепь $\mathfrak{T}$ измеримых множеств безатомического пространства $\langle \Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P} \rangle$ порождает алгебру $\sigma(\mathfrak{T})$. Докажем, что для любого $B \in \sigma(\mathfrak{T})$ меры $\mathbb{P}(B) > 0$ найдётся $B' \in \sigma(\mathfrak{T})$ такое, что $B' \subset B$ и $\mathbb{P}(B) > \mathbb{P}(B') > 0$. Для этого, очевидно, достаточно доказать, что в цепи $\mathfrak{T}$ найдётся множество T такое, что

$0 < \mathbb{P}(T \cap B) < \mathbb{P}(B)$. Рассмотрим множества

$$\underline{T} = \bigcup_{T_- \in \mathfrak{T} : \mathbb{P}(T_- \cap B) = 0} T_- \quad \text{и} \quad \overline{T} = \bigcap_{T_+ \in \mathfrak{T} : \mathbb{P}(T_+ \cap B) = \mathbb{P}(B)} T_+,$$

по построению вложенные $\underline{T} \subset \overline{T}$ так, что $\mathbb{P}(\overline{T}) - \mathbb{P}(\underline{T}) \geq \mathbb{P}(B)$. Поскольку цепь $\mathfrak{T}$ максимальна в безатомическом пространстве, существует $T_0 \in \mathfrak{T}$ такое, что $\underline{T} \subset T_0 \subset \overline{T}$. Так как $\underline{T} \subset T_0 \Rightarrow \mathbb{P}(T_0 \cap B) > 0$ и $T_0 \subset \overline{T} \Rightarrow \mathbb{P}(T_0 \cap B) < \mathbb{P}(B)$, значит T_0 искомое. □

Определение A.4. *Для любых семейств измеримых множеств* $\mathfrak{T} \subseteq 2^\Omega$ *и мер* $\mathbb{P} : \mathfrak{T} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ *определим отображение* $\mathrm{mim}\langle \mathfrak{T}, \mathbb{P} \rangle : \Omega \to \mathbb{R}_{\geq 0}$, *называемое наименьшей мерой включения и вычисляемое по формуле* $\mathrm{mim}\langle \mathfrak{T}, \mathbb{P} \rangle(\omega) = \inf\{\mathbb{P}(T) \mid \omega \in T \in \mathfrak{T}\}$.

Лемма A.7. *Если* $\mathfrak{T} \subset 2^\Omega$ *— цепь множеств, порождающая безатомическую* σ*-алгебру, то* $\mathbb{P} \circ \mathrm{mim}\langle \mathfrak{T}, \mathbb{P} \rangle^{-1}$ *совпадает с мерой Лебега на отрезке* $[0, \mathbb{P}(\Omega)]$.

Доказательство. Поскольку $\mathfrak{T}$ — цепь, $\omega \in T \Leftrightarrow \mathrm{mim}\langle \mathfrak{T}, \mathbb{P} \rangle(\omega) \leq \mathbb{P}(T), \forall \omega \in \Omega, T \in \mathfrak{T}$. Так как $\mathfrak{T}$ вдобавок порождает безатомическую σ-алгебру, то для каждого $0 < t < \mathbb{P}(\Omega)$ найдётся $T \in \mathfrak{T}$ такое, что $\mathbb{P}(T) = t$. Следовательно, функция $\mathrm{mim}\langle \mathfrak{T}, \mathbb{P} \rangle$ отображает множества $T \in \mathfrak{T}$ на отрезки $[0, \mathbb{P}(T)]$, что очевидно влечёт цель доказательства. □

Лемма A.8. *Пусть* $\langle \Omega, \mathfrak{B}, \mathbb{P} \rangle$ *— безатомическое вероятностное пространство с* σ*-алгеброй, разложимой на* n *безатомических компонент* $\mathfrak{B} = \sigma(\mathfrak{B}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{B}_n)$ *таких, что все события из разных компонент совместно независимы, т.е.* $\mathbb{P}(B_1 \cap \ldots \cap B_n) = \mathbb{P}(B_1) \ldots \mathbb{P}(B_n)$ *для любых* $B_i \in \mathfrak{B}_i, i = \overline{1, n}$. *Тогда любая измеримая функция с конечным кодоменом* $f : \Omega \to X$ *может быть представлена в виде* $f = \varphi \circ \mathfrak{r}$, *где* $\mathfrak{r} : \Omega \to [0, 1]^n$ *такова, что* $\mathbb{P} \circ \mathfrak{r}^{-1}$ *совпадает с мерой Лебега, а* $\varphi : [0, 1]^n \to X$ *— борелевская.*

Доказательство. Рассмотрим обратную функцию $f^{-1} : X \to \mathfrak{B}$. В силу разложимости $\mathfrak{B}$ её можно представить как предел последовательности конъюнкций:

$$f^{-1}(x) = \bigcup_{j=1}^{\infty} F_1^j(x) \cap \ldots \cap F_n^j(x), \; F_i^j : X \to \mathfrak{B}_i.$$

Обозначим семейства множеств $\mathfrak{F}_i = \{F_i^j(x) \mid j \in \mathbb{N}, x \in X\}$ и заметим, что f измерима по $\sigma(\mathfrak{F}_1 \cup \ldots \cup \mathfrak{F}_n)$. По лемме A.5, существуют цепи множеств $\mathfrak{T}_i \subset \mathfrak{B}_i$ такие, что $\sigma(\mathfrak{F}_i) = \sigma(\mathfrak{T}_i)$. Согласно принципу максимума Хаусдорфа каждая такая цепь вложена в максимальную цепь $\overline{\mathfrak{T}}_i \subset \mathfrak{B}_i$, порождающую безатомическую σ-алгебру по лемме A.6. Построим искомые функции: $\mathfrak{r} = (\mathrm{mim}\langle\overline{\mathfrak{T}}_1, \mathbb{P}\rangle, \ldots, \mathrm{mim}\langle\overline{\mathfrak{T}}_n, \mathbb{P}\rangle)$ и $\varphi = f \circ \mathfrak{r}^{-1}$. Необходимые свойства соблюдаются по построению. $\square$

Доказательство теоремы 4.1. Применим предыдущую лемму к произвольному пространству заговоров Φ_1 структуры $\mathfrak{A} = \{A_1, \ldots, A_n\}$, используя в качестве компонент разложения $\mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_n$ σ-алгебры тайны соответствующих групп заговорщиков. Это даёт для любого разбиения $f_1 \models \Phi_1$ разложение $f_1 = \varphi \circ \mathfrak{r}$. В любом другом пространстве заговоров Φ_2 той же структуры $\mathfrak{A}$ соответствующее разбиение $f_2 \models \Phi_2$ построим похожим образом: $f_2 = \varphi \circ \mathfrak{u}$. Здесь φ то же самое, а $\mathfrak{u} = (\mathrm{mim}\langle\mathfrak{W}_1, \mathbb{P}_2\rangle, \ldots, \mathrm{mim}\langle\mathfrak{W}_n, \mathbb{P}_2\rangle)$, где $\mathfrak{W}_i$ - произвольные максимальные цепи, вложенные в σ-алгебры соответствующих тайн пространства заговоров Φ_2. Поскольку и $\mathbb{P}_1 \circ \mathfrak{r}^{-1}$, и $\mathbb{P}_2 \circ \mathfrak{u}^{-1}$ обе совпадают с мерой Лебега, то и $\mathbb{P}_1 \circ f_1^{-1} = \mathbb{P}_2 \circ f_2^{-1}$, а значит теорема доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Богачев В.И. *Основы теории меры.* Т. 1. Москва-Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2003.

2. Колмогоров А.Н. *Основные понятия теории вероятностей.* 2-е изд. М.: Наука, 1974.

3. Николенко С.И. *Теория экономических механизмов: учебное пособие.* М.: ИНТУИТ.РУ : БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009.

4. Энгелькинг Р. *Общая топология.* М.: Мир, 1986.

5. Aumann R.J. *Subjectivity and correlation in randomized strategies* // Journal of Mathematical Economics. 1974. V. 1. N. 1. P. 67–96.

6. Bernheim B.D., Peleg B., Whinston M.D. *Coalition-Proof Nash Equilibria I. Concepts* // Journal of Economic Theory. 1987. V. 42. N. 1. P. 1–12.

7. Boros E., Gurvich V., Vasin A. *Stable families of coalitions and normal hypergraphs* // Mathematical Social Sciences. 1997. V. 34. N. 2. P. 107–123.

8. Dhillon A., Mertens J.F. *Perfect Correlated Equilibria* // Journal of Economic Theory. 1996. V. 68. N. 2. P. 279–302.

9. Hart S., Mas-Colell A. *A Simple Adaptive Procedure Leading to Correlated Equilibrium* // Econometrica. 2000. V. 68. N. 5. P. 1127–1150.

10. Myerson R.B. *Optimal coordination mechanisms in generalized principal–agent problems* // Journal of Mathematical Economics. 1982. V. 10. N. 1. P. 67–81.

NORMATIVE CONSPIRACY THEORY

Maxim A. Savchenko, MSU Faculty of Computational Mathematics and Cybernetics, postgraduate (pdunan@gmail.com).

Abstract: Author introduces new model based on correlated extension of normal form games, aiming to describe player behavior in environments that allow information asymmetry arising from different capabilities to privately coordinate strategies.

Keywords: matrix n-player games, correlated strategies, non-binding secret agreements.